



# Μαγικά Τετράγωνα

Αμανατίδη Ελισάβετ  
Κατσαδούρη Μαριλένα  
Μάλλιου Ελευθερία

Μάθημα: Ερευνητική Εργασία  
Καθηγητής: κ. Κιτσάκης

Β' Αρσάκειο Τοσίτσειο Λύκειο Εκάλης  
Σχολικό έτος: 2017- 2018

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 1) Πρόλογος
- 2) Ορισμός
- 3) Ιστορία των μαγικών τετραγώνων
- 4) Κατασκευή μαγικών τετραγώνων άρτιας τάξης
- 5) Επίλογος
- 6) Βιβλιογραφία

## **1)Πρόλογος**

Στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε με τα Μαγικά Τετράγωνα. Ειδικότερα θα εξετάσουμε τι είναι τα μαγικά τετράγωνα και πως προέκυψαν. Εν συνεχεία θα αναφερθούμε στα φημισμένα μαγικά τετράγωνα του Durer. Εν τέλει θα αναλύσουμε τον τρόπο κατασκευής μαγικών τετραγώνων άρτιας τάξης.

## 2)Ορισμός

Μαγικό τετράγωνο είναι μια διάταξη θετικών αριθμών, έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο να είναι το ίδιο. Μαγικά τετράγωνα μπορούν να κατασκευαστούν για κάθε ακέραιο αριθμό  $n > 2$  και δεν υπάρχει κανένα μαγικό τετράγωνο  $n=2$ . Αν ένα μαγικό τετράγωνο έχει  $n$  γραμμές και  $n$  στήλες τότε λέμε ότι έχει τάξη  $n$ .

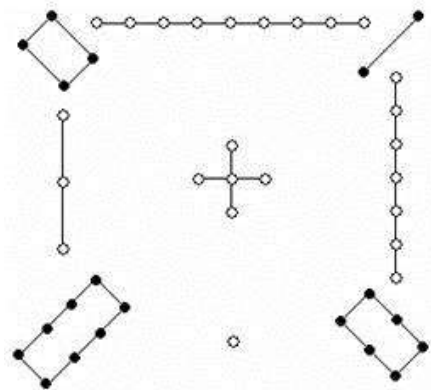
Για παράδειγμα στο παρακάτω μαγικό τετράγωνο το άθροισμα σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο είναι 21.

|   |    |    |
|---|----|----|
| 4 | 11 | 6  |
| 9 | 7  | 5  |
| 8 | 3  | 10 |

## 3)Ιστορία των μαγικών τετραγώνων

Το πρώτο μαγικό τετράγωνο, το οποίο ήταν κινέζικο εμφανίστηκε το 2000 π.Χ., χαραγμένο στη πλάτη μιας χελώνας.

Ο ποταμός Λο είχε πλημμυρίσει και ο αυτοκράτορας Υο πρόσταξε να γίνουν θυσίες, για να εξευμενιστεί ο θεός του ποταμού. Έτσι ο θεός έστειλε μια χελώνα, που είχε στην πλάτη της ζωγραφισμένο ένα μοτίβο αριθμών, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από τότε οι Κινέζοι μαθηματικοί αρχίσαν να κατασκευάζουν μεγαλύτερα μαγικά τετράγωνα, για τα οποία πίστευαν ότι είχαν μαγικές ιδιότητες. Το εντυπωσιακότερο μαγικό τετράγωνο που έφτιαξαν είχε διαστάσεις 9X9 .

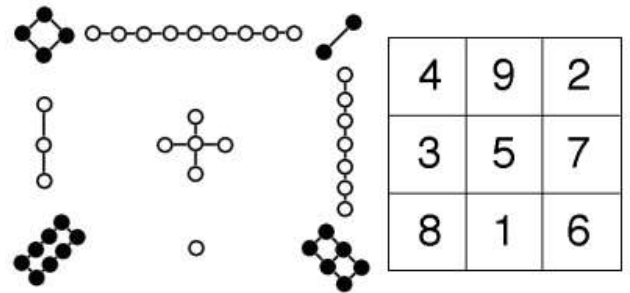


Αντικαθιστώντας τους κύκλους με αριθμούς προκύπτει το μαγικό τετράγωνο του διπλανού σχήματος.

Στις γραμμές και στις στήλες είναι τοποθετημένοι οι πρώτοι εννέα φυσικοί αριθμοί.

Το άθροισμα των γραμμών, των στηλών και των διαγώνιων δίνει τον μαγικό αριθμό 15.

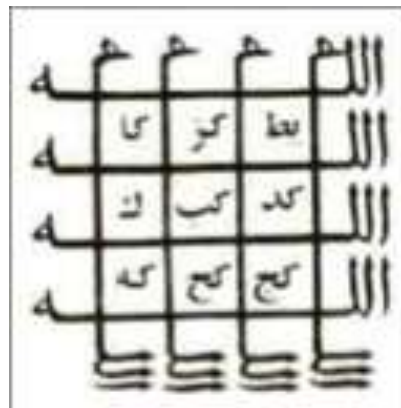
Το μαγικό αυτό τετράγωνο Lo-Shu είναι το αρχαιότερο μαγικό τετράγωνο που έγινε γνωστό.



Το ενδιαφέρον των Κινέζων για τα μαγικά τετράγωνα συνδέεται περισσότερο με την μαντεία παρά με τα μαθηματικά.

Τα μαγικά τετράγωνα έφθασαν στην Ινδία από Κινέζους εμπόρους, όπου χρησιμοποιήθηκαν στην αρωματοποιία και στην διευκόλυνση των τοκετών.

Οι Άραβες μαθηματικοί γνώριζαν τα μαγικά τετράγωνα από τον 9<sup>ο</sup> αιώνα.



Ο Ισλαμικός πολιτισμός προσέγγισε τα μαγικά τετράγωνα με μαθηματικό τρόπο και έτσι οδηγήθηκαν σε έξυπνους τρόπους κατασκευής τους. Τον 13<sup>ο</sup> αιώνα ανακάλυψαν ένα μαγικό τετράγωνο τάξεως 15x15.

Ο Εμμανουήλ Μοσχόπουλος (1265-1315) είναι αυτός που εισήγαγε τα μαγικά τετράγωνα στη Δύση. Το έργο του είναι το πρώτο ελληνικό κείμενο πάνω στα μαγικά τετράγωνα και είχε σκοπό να διατυπώσει για πρώτη φορά κανόνες κατασκευής μαγικών τετραγώνων διαφόρων τάξεων, διατηρώντας τον όρο «μαγικό» μόνο στον τίτλο, χωρίς ν' αποδίδει πουθενά μαγικές ιδιότητες σ' αυτά.

Τα παρακάτω μαγικά τετράγωνα κατασκευάστηκαν από τον Μοσχόπουλο:

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 38 | 14 | 32 | 1  | 26 | 44 | 20 |
| 5  | 23 | 48 | 17 | 42 | 11 | 29 |
| 21 | 39 | 8  | 33 | 2  | 27 | 45 |
| 30 | 6  | 24 | 49 | 18 | 36 | 12 |
| 46 | 15 | 40 | 9  | 34 | 3  | 28 |
| 13 | 31 | 7  | 25 | 43 | 19 | 37 |
| 22 | 47 | 16 | 41 | 10 | 35 | 4  |

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 62 | 59 | 8  | 9  | 54 | 51 | 16 |
| 60 | 7  | 2  | 61 | 52 | 15 | 10 | 53 |
| 6  | 57 | 64 | 3  | 14 | 49 | 56 | 11 |
| 63 | 4  | 5  | 58 | 55 | 12 | 13 | 50 |
| 17 | 46 | 43 | 24 | 25 | 38 | 35 | 32 |
| 44 | 23 | 18 | 45 | 36 | 31 | 26 | 37 |
| 22 | 41 | 48 | 19 | 30 | 33 | 40 | 27 |
| 47 | 20 | 21 | 42 | 39 | 28 | 29 | 34 |

Στο χαρακτηριστικό έργο του Albrecht Dürer "Melancholia", που αποτελεί συνδυασμό μαθηματικών και καλλιτεχνικών ενδιαφερόντων του καλλιτέχνη, διακρίνουμε στο πάνω δεξιό άκρο ένα μαγικό τετράγωνο 4<sup>ης</sup> τάξης, ένα από τα πρώτα στην Ευρωπαϊκή τέχνη.

Ο Albrecht Dürer ήταν ένας Γερμανός ζωγράφος, χαράκτης και μαθηματικός. Ήταν ένας σημαντικός καλλιτέχνης και είχε σημαντική συμβολή στα μαθηματικά και στην γεωμετρία.

Στο τετράγωνο αυτό οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 16 είναι διατεταγμένοι έτσι ώστε οι σειρές, οι στήλες και οι διαγώνιοι να δίνουν το μαγικό άθροισμα 34.

Το τετράγωνο αυτό θεωρείται το πρώτο μαγικό τετράγωνο στη Δύση .



34 είναι το σύνολο των διαφόρων πεδίων μέσα στο μαγικό τετράγωνο.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

Το άθροισμα κάθε στήλης είναι 34.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

Το άθροισμα των γωνιακών τετραγώνων είναι 34.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

λ.

Το άθροισμα των κεντρικών τετραγώνων είναι 34.





|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

$$5+9+8+12=34$$

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

$$3+2+15+14=34$$

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

Και πάει λέγοντας...34.

Οι μεσαίοι αριθμοί στην τελευταία γραμμή αντιπροσωπεύουν το έτος 1514, που είναι το έτος δημιουργίας του χαρακτικού.

Το γράμμα D στο επίθετό του είναι το 4<sup>ο</sup> γράμμα του αλφάβητου και το A του ονόματος του είναι το 1<sup>ο</sup>.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

Άλλο διάσημο μαγικό τετράγωνο 4<sup>ης</sup> τάξης βρίσκεται στην είσοδο του ναού Sagrada Familia της Βαρκελώνης, το οποίο σχεδιάστηκε από τον Antoni Gaudi και τον γλύπτη Josep Subirachs.

Το μαγικό άθροισμα του τετραγώνου είναι 33, όσα και τα χρόνια που έζησε ο Ιησούς Χριστός.



## 4) Κατασκευή μαγικών τετραγώνων άρτιας τάξης

Κατασκευάζουμε τον πίνακα 4X4 του σχήματος:

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

Εναλλάσσουμε τη 1<sup>η</sup> γραμμή με την 4<sup>η</sup> και την 2<sup>η</sup> με την 3<sup>η</sup> χωρίς να πειράξουμε τους αριθμούς που βρίσκονται στις διαγώνιες, οπότε παίρνουμε τον πίνακα:

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 14 | 15 | 4  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 13 | 3  | 2  | 16 |

Εναλλάσσουμε τη 1<sup>η</sup> στήλη με την 4<sup>η</sup> και τη 2<sup>η</sup> με την 3<sup>η</sup> χωρίς να πειράξουμε τους αριθμούς που βρίσκονται στις διαγώνιες, οπότε έχουμε τον πίνακα:

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 15 | 14 | 4  |
| 12 | 6  | 7  | 9  |
| 8  | 10 | 11 | 5  |
| 13 | 2  | 3  | 16 |

## 5)Επίλογος

Μέσα στα πλαίσια του μαθήματος της Ερευνητικής εργασίας μας δόθηκε η ευκαιρία να ανακαλύψουμε και να κατανοήσουμε τα μαγικά τετράγωνα. Βέβαια στόχος μας ήταν να ερευνήσουμε πως προέκυψαν και τι ακριβώς είναι ένα μαγικό τετράγωνο.

## 6)Βιβλιογραφία

- <http://www.mathlab.upatras.gr/wp-content/uploads/2013/09/Εργασία-Τα-μαγικά-τετράγωνα.pdf>
- [http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl\\_Dragoumanioti\\_Vasiliki.pdf](http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Dragoumanioti_Vasiliki.pdf)