Διερευνητική εργασία:

Η μαγεία των αριθμών

Ο “Π”αντοδύναμος αριθμός

« Όλοι οι αριθμοί είναι ενδιαφέροντες, μερικοί όμως είναι πιο ενδιαφέροντες από τους άλλους και το π είναι ο πιο ενδιαφέρων από όλους » - *Ιαν Στιούαρτ*

<u>Ονόματα Μαθητών:</u>

1. *Σταύρος Γάτος*
2. *Θάνος Γκιργινούδης*
3. *Βασίλης Μητρόπουλος*
4. *Ειρήνη Υφαντή*
5. *Κέλλυ Χαβάκη*

Περιεχόμενα:

Εισαγωγή:

Οι αρχαίοι Έλληνες πριν από την εποχή του Ευκλείδη είχαν αντιληφθεί και αποδείξει την ύπαρξη αριθμών που δεν μπορούν να γραφτούν ως λόγος δύο ακεραίων. Είχαν ανακαλύψει δηλαδή, τους άρρητους αριθμούς. Επιπλέον, ανακάλυψαν ότι οι άρρητοι αριθμοί αυτοί αποτελούν λύσεις αλγεβρικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές. Όμως, με το πέρασμα των χρόνων, οι άνθρωποι, χωρίς να επαναπαύονται με τις ήδη ανακαλύψεις τους, άρχισαν να υποπτεύονται ότι υπήρχαν πιο “περίεργοι” αριθμοί από τους άρρητους. Δηλαδή ότι υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί οι οποίοι δεν πληρούσαν τις παραπάνω προϋποθέσεις.

Οι αριθμοί αυτοί ονομάστηκαν *υπερβατικοί,* δηλαδή αυτοί οι οποίοι δεν είναι ρίζα κανενός πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές. Χαρακτηριστικά όπως αναφέρει και ο Euler: “ Είναι οι αριθμοί των οποίων η φύση δύσκολα γίνεται αντιληπτή και δεν περιγράφονται με αλγεβρικές μεθόδους”. Ένας από τους αριθμούς αυτούς είναι και ο περιβόητος αριθμός “π”, ο οποίος είναι και η θεματική ενότητα της εργασίας την οποία θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

1η Ενότητα: *Ο αριθμός “π”*

• *Τί είναι ο αριθμός “π”:*

Η μαθηματική σταθερά “π” είναι ένας πραγματικός, άρρητος αριθμός που μπορεί να οριστεί ως λόγος της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του, κατά τον Αρχιμήδη και ο οποίος χρησιμοποιείται ακόμα και στην σύγχρονη εποχή σε ποικίλες αναπτυσσόμενες επιστήμες όπως φυσική, μηχανολογία και προφανώς στα μαθηματικά γενικότερα. Είναι ένας υπερβατικός αριθμός, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, δηλαδή δεν υπάρχει πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές του οποίου το “π” να αποτελεί ρίζα. Τα ψηφία του αριθμού “π” είναι άπειρα και μέχρι σήμερα, μέσω πρακτικών εφαρμογών έχουν υπολογιστεί πάνω από 5 τρισεκατομμύρια ψηφία του, κάνοντας τον έναν από τους πιο αξιόλογους αριθμούς.

Το “π”, είναι συνυφασμένο με πάμπολλες ιστορίες μυστηρίου, ρομαντισμού, αντιπαραθέσεων και υπερβολών και γι’ αυτόν τον λόγο τράβηξε την προσοχή και το ενδιαφέρον ενός μεγάλου αριθμού ανθρώπων. Οι Αναξαγόρας, Αρχιμήδης, Κλαύδιος Πτολεμαίος, Φιμπονάτσι, Βιέτ, Σνελ, Ουόλις, Γκρέγκορι, Νεύτωνας και Όιλερ, είναι μερικοί από τις μεγάλες μορφές που ασχολήθηκαν με την σταθερά “π”.

$$\pi = \frac{\text{Μήκος κύκλου}}{\text{Διάμετρος κύκλου}}$$

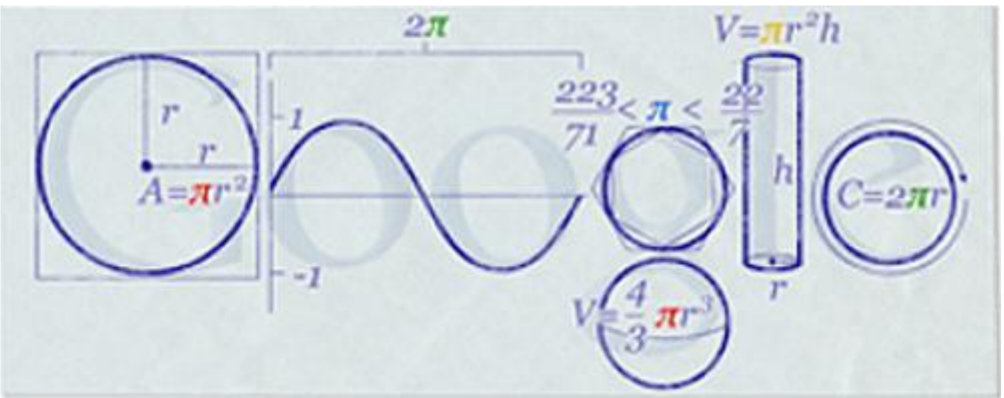
• Πώς συμβολίζεται:

Ο συμβολισμός του αριθμού “π” προέρχεται από το ελληνικό γράμμα π το οποίο προέκυψε ως αρχικό γράμμα της λέξης περιφέρεια (εννοώντας την περιφέρεια του κύκλου από τον οποίο προέκυψε). Όσο για τον συμβολισμό του, αυτός είναι του 1706. Τότε χρησιμοποίησε πρώτος ο Ουίλιαμ Τζόουνς το “π”, για να συμβολίσει τον σταθερό αυτό λόγο. Όμως αυτός που τον καθιέρωσε παγκοσμίως ήταν ο Όιλερ, με το τεράστιο κύρος του.

• Πότε γιορτάζεται:

Ο αριθμός “π” είναι τόσο ξεχωριστός, που έχει και δική του μέρα στην οποία γιορτάζει. Η μέρα αυτή είναι στις 14 Μαρτίου (που προκύπτει από τον αμερικάνικο τρόπο γραφής της ημερομηνίας 3,14). Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι τα πρώτα 7 ψηφία του “π” είναι τα «3,1415926» οπότε, για να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια, γιορτάζεται ακριβώς στις 14 Μαρτίου, 1:59 και 26 δευτερόλεπτα.

Εξίσου όμως διάσημη είναι και η γιορτή του αριθμού “π” στην Ευρώπη στις 22 Ιουλίου, η οποία προκύπτει από τη διαίρεση του 22 με το 7 που έχει ως πηλίκο, το “π”.



«Φόντο του Google την ημέρα γιορτής του αριθμού “π”»

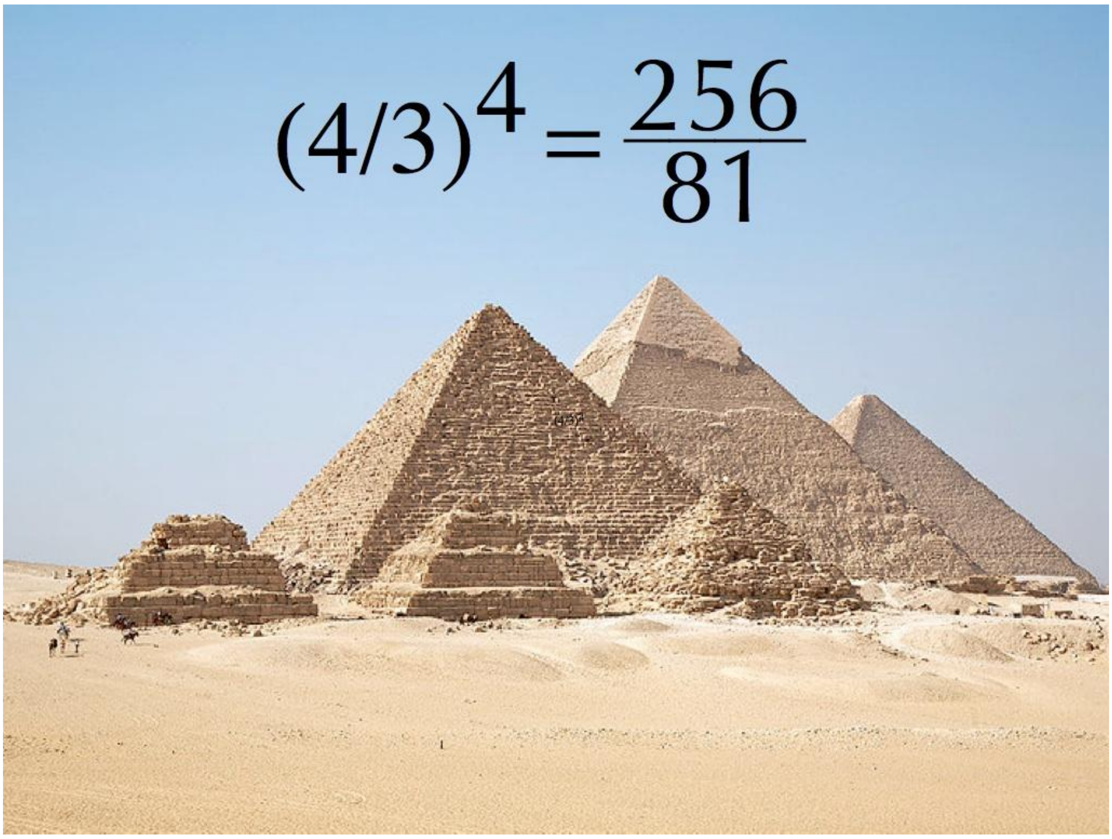
$2^{η}$ Ενότητα: ***Η Ιστορία του "π"***

Ποιοι πρωτοασχολήθηκαν με τον αριθμό "π":

- Αιγύπτιοι:

Η αρχαιότερη γνωστή καταγραφή για την σταθερά "π" υπάρχει στον πάπυρο Ρινт και έγινε από τον Αιγύπτιο γραφέα Αχμές γύρω στο 1650 π.Χ., είναι δε 3,16049. Παρόλα αυτά δεν υπάρχουν στοιχεία που να πιστοποιούν ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν πως το π είναι σταθερά.

«Πάπυρος του Ριντ που αναφέρει τον υπολογισμό του π»



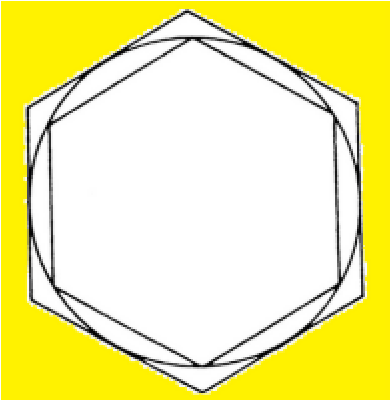
- Βαβυλώνιοι:

Υπολόγισαν το “π” χρησιμοποιώντας τον τύπο 25/8=3,15 το 1600 π.Χ. κάνοντας τους οι πρώτοι στην ιστορία που ερεύνησαν το “π” αναγνωρίζοντας το ως σταθερά.

- Αρχιμήδης:

Ο Αρχιμήδης (287 π.Χ.-212 π.Χ.) ήταν ο πρώτος που έδωσε μια μέθοδο υπολογισμού του π με μεγάλη προσέγγιση.

Η μέθοδός του έγκειται στο ότι η περίμετρος ενός κανονικού πολυγώνου n πλευρών εγγεγραμμένου σε κύκλο, είναι μικρότερη της περιφέρειας του κύκλου και άρα και της περιμέτρου του περιγεγραμμένου πολυγώνου, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Επειδή ο Αρχιμήδης ήταν ο πρώτος ο οποίος προσέγγισε τον υπολογισμό του π σε μια πιο θεωρητική βάση, το π είναι γνωστό και ως σταθερά του Αρχιμήδη.

«Πορτρέτο του διάσημου Έλληνα μαθηματικού»

σονα ἢ ὃν ,γιγ L′ δ′ πρὸς ψπ. δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,εϡκδ L′ δ′ πρὸς ψπ ἢ ὃν ,αωκγ πρὸς σμ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ′· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ,αωλη θ ια′ πρὸς σμ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αζ πρὸς ξϛ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια μ′· ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ,αθ ϛ′ πρὸς ξϛ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ ,βιϛ ϛ′ πρὸς ξϛ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ,βιζ δ′ πρὸς ξϛ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,ϛτλϛ πρὸς ,βιζ δ′, ἅπερ τῶν ,βιζ δ′ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα′· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟϛγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα′· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα′.

ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι οα′ μείζων.

1 L′] Eutocius, γ′ AB(C). **3** ,εϡκδ] Eutocius, e corr. B, ,ετκδ ABC. L′] Eutocius, e corr. B, ε′ A, 3 B. **4** σμ] B²C, σν AB. ιγ′] B², ιγ′ α′ A(C); δ ιγ′ om. B. **5** ια′] B², om. AB(C). **7** ξϛ] C, e corr. B, σξϛ AB. **8** ἑκατέρας] B², εκατερα ABC. ια μ′· ἡ ΑΓ] B², *Wallis*, οιμαι AB, οιμ(·) C. πρὸς ΓΚ Eutocius. ΚΓ ἢ ὅν] B², *Wurmius*; (ΓΚ) . . (χε)ν C, καταγον A. ,αθ ϛ′] B²C, αοϛ A. **10** ΛΓ] *Wallis*, ΑΓ ABC; πρὸς ΛΓ Eutocius. **13** ,ϛτλϛ] Eutocius, B², *Wallis*, ,ϛτα ϛ′ ABC. **14** ,βιζ (pr.)] e corr. B, ,ζιζ AC. **15** οα′] B, corr. ex ο′ α′ C, ο′ α′ A. **16** ϟϛγώνου] C, ϟϛ πολυγωνου AB. **17** ι οα′] e corr. B, ὃν ο′ ια′ AB(C). **18** ι οα′] e corr. B, θ′ ια′ AC. **20** ἐλάσσονι] scripsi, ελασσων ABC. μείζονι—**21** μείζων] scripsi,

ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΥΟ ΣΕΛΙΔΩΝ ΑΠΟ ΤΟ “ARCHIMEDES OPERA OMNIA” ΠΟΥ ΑΝΑΦΕΡΟΝΤΑΙ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ π.

(J.L. Heiberg, Ed., Vol. I, 1910.)

«Σημειώσεις του Αρχιμήδη για τη μέτρηση του κύκλου»

- Αλεξανδρινοί:

Υπολόγισαν το “π” το 150 μ.Χ. φτάνοντας πιο κοντά από τους υπολογισμούς του Αρχιμήδη. Ακόμη, αξίζει να σημειωθεί ότι με βάση τους υπολογισμούς των Αλεξανδρινών, ο Κολόμβος χρησιμοποίησε τον υπολογισμό αυτόν, των Αλεξανδρινών στο ταξίδι του για τις Ινδίες.

- Κινέζοι:

Στην πάροδο των χρόνων, με τη σταθερά του “π” ασχολήθηκαν και οι Κινέζοι όπου ακόμη περισσότερα στοιχεία του υπολογίστηκαν. Στις αρχές λοιπόν του Πρώτου αιώνα μετά Χριστόν, ο Κινέζος μαθηματικός Liu Hsiao, προσέγγιζε το π με την τιμή π=3,1547. Όμως επειδή δεν υπάρχουν καθόλου στοιχεία παραμένει παντελώς άγνωστη η μέθοδος που χρησιμοποίησε για να πάρει την τιμή αυτή.

- Ινδοί:

Στο Sulva Sutra (βιβλίο το οποίο κυρίως περιέχει αναφορές για την κατασκευή βωμών για θυσίες) υπήρχε κυρίως μια συλλογή από θρησκευτικούς κανόνες, αλλά περιέχονταν επίσης και αρκετές μαθηματικές γνώσεις και πληροφορίες καθώς και στοιχεία αστρονομίας. Μεταξύ των άλλων περιέχεται και ένας κανόνας για την κατασκευή ενός κύκλου με εμβαδό ίσο με το εμβαδό ενός (δοσμένου) τετραγώνου. Σύμφωνα λοιπόν με τον κανόνα αυτό:

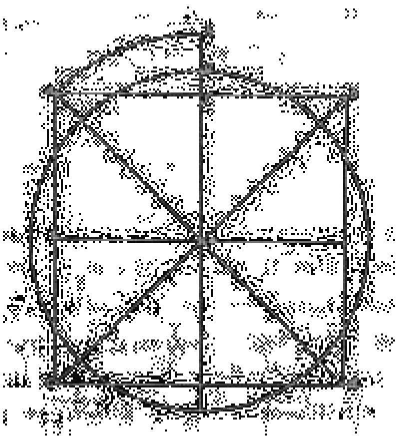
“ Στο 1/2 της πλευράς του τετραγώνου προσθέτουμε το 1/3 της διαφοράς μεταξύ του 1/2 της διαγώνιου και του 1/2 της πλευράς. Το μήκος που προκύπτει μας δίνει την ακτίνα του κύκλου που έχει το ίδιο εμβαδόν με το τετράγωνο”.

Δηλαδή, η ακτίνα του “ισεμβαδικού” κύκλου είναι:

R = a/2 +1/3.(a.sqrt(2)/2 – a/2) = a/3 (1+sqrt(2)/2) ,

όπου με sqrt εννοούμε την τετραγωνική ρίζα (square root).

Με βάση την παραπάνω σχέση βρίσκει κανείς για το π την τιμή: *π = 3,0884* , δηλαδή μια όχι και τόσο ικανοποιητική προσέγγιση.



Στη συνέχεια, ο αριθμός “π” έγινε ένας από τους πιο εντυπωσιακούς αριθμούς παγκοσμίως και στην σύγχρονη εποχή επιστήμονες και διανοούμενοι από όλο τον κόσμο τον μελετούν. Συγκεκριμένα, ένας επιστήμονας της πληροφορικής έσπασε το ρεκόρ υπολογισμού των ψηφίων μιας διάσημης μαθηματικής σταθεράς, του αριθμού "π", υπολογίζοντας σχεδόν 2,7 τρισεκατομμύρια ψηφία που ακολουθούν μετά το 3,14, ήτοι 123 δισεκατομμύρια περισσότερα ψηφία σε σχέση με το προηγούμενο ρεκόρ.

Συνολικά θα μπορούσαμε να συνοψίσουμε τα άτομα που ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό του αριθμού «π» στον παρακάτω χρονολογικό πίνακα:

Το χρονολόγιο του π.

2000 π.Χ.	*Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούν την τιμή* $\pi = 3\,{}^{1}\!/_{8}$.
	Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούν την τιμή $\pi = {}^{256}\!/_{81} = 3{,}16045$.
1100 π.Χ.	*Οι Κινέζοι χρησιμοποιούν την τιμή* $\pi = 3$.
550 π.Χ.	*Στην Παλαιά Διαθήκη υποδηλώνεται η τιμή* $\pi = 3$.
434 π.Χ.	*Ο Αναξαγόρας επιχειρεί να τετραγωνίσει τον κύκλο*
430 π.Χ.	*Ο Αντιφών και ο Βρύσων διατυπώνουν την αρχή της εξάντλησης.*
335 π.Χ.	*Ο Δεινόστρατος προσπαθεί κατασκευαστικά να τετραγωνίσει τον κύκλο.*
3^{ος} π.Χ.αι.	*Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί ένα πολύγωνο με 96 πλευρές για να αποδείξει ότι* $3\,{}^{10}\!/_{71} < \pi < 3\,{}^{1}\!/_{7}$ *και* $\pi \approx 211875 : 67441 = 3{,}14163$. *Επίσης, χρησιμοποιεί την έλικα για να τετραγωνίσει τον κύκλο.*
225 π.Χ.	*Ο Απολλώνιος βελτίωσε την Αρχιμήδεια προσέγγιση, χωρίς να είναι γνωστό κατά πόσο.*
130 μ.Χ.	*Ο Chang Hong χρησιμοποιεί* $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1622$.
150 μ.Χ.	*Ο Κλαύδιος ο Πτολεμαίος χρησιμοποιεί την τιμή* $\pi = 3^{0}8'30'' = {}^{377}\!/_{120} = 3{,}14166.$
250 μ.Χ.	*Ο Wang Fan χρησιμοποιεί την τιμή* $\pi = 142/45 = 3{,}155555$.
263 μ.Χ.	*Ο Liu Hui χρησιμοποιεί την τιμή* $\pi = 157/50 = 3{,}14159$.
480 μ.Χ.	*Ο Tsu Ch'ung Chi καθιερώνει το 355/113= 3,1415926 και επιπλέον 3,1415926< π < 3.1415927 .*
499 μ.Χ.	*Ο Aryabhata χρησιμοποιεί* $\pi = 62832/2000 = 3{,}1416$.
640 μ.Χ.	*Ο Brahmagupta χρησιμοποιεί* $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1622$.
800 μ.Χ.	*Ο Al-Khwarizmi χρησιμοποιεί* $\pi = 3{,}1416$.
1220 μ.Χ.	*Ο Leonardo of Pisa (Fibonacci) βρίσκει* $\pi = 3{,}141818$.

165

1400 μ.Χ.	*Ο Madhava χρησιμοποιεί* $\pi = 3{,}14159265359$.
1430 μ.Χ.	*Ο Al-Kashi υπολόγισε* $\pi = 3{,}14159265358979$.
1573 μ.Χ.	*Ο Valentinus Otho βρίσκει ότι* $\pi \approx 355/113 = 3{,}1415929$.
1593 μ.Χ.	*Ο Francois Viéte βρίσκει πρώτος ένα άπειρο γινόμενο για να περιγράψει το π. Επίσης χρησιμοποιεί* $\pi = 3{,}1415926536$.
1593 μ.Χ.	*Ο Adriaen van Romanus υπολογίζει* $\pi = 3{,}141592653589793$.
1596 μ.Χ.	*Ο Ludolph van Ceulen υπολογίζει πάνω από 32 ψηφία* $\pi = 3{,}14159265358979323846...$
1610 μ.Χ.	*Ο Ludolph van Ceulen επεκτείνει τον υπολογισμό στα 35 δεκαδικά ψηφία.*
1621 μ.Χ.	*Ο Snellius βελτιώνει την αρχιμήδεια μέθοδο.*
1654 μ.Χ.	*Ο Huygens αποδεικνύει την εγκυρότητα της εργασίας του Snellius.*
1655 μ.Χ.	*Ο Wallis βρίσκει ένα άπειρο ρητό γινόμενο για το π.*
1655 μ.Χ.	*Ο Brouncker το μετατρέπει σε συνεχές κλάσμα.*
1663 μ.Χ.	*Ο Μουραμάτσου Σιγκεκίγιο υπολογίζει επτά ακριβή ψηφία στην Ιαπωνία.*
1665-1666 μ.Χ.	*Ο Newton ανακαλύπτει το λογισμό και υπολογίζει τουλάχιστον 16 δεκαδικά ψηφία του π. Δεν δημοσιεύονται μέχρι το 1737 (μετά το θάνατό του).* $\pi = 3{,}1415926535897932$.
1671 μ.Χ.	*Ο Gregory ανακαλύπτει τη σειρά τόξου εφαπτομένης.*
1674 μ.Χ.	*Ο Leibniz ανακαλύπτει τη σειρά τόξου εφαπτομένης για το π.*
1699 μ.Χ.	*Ο Sharp υπολογίζει 71 δεκαδικά ψηφία του π.*
1700 μ.Χ.	*Ο Seki Kowa υπολογίζει 10 ψηφία του π.*
1706 μ.Χ.	*Ο Machin υπολογίζει 100 ψηφία του π.*
1706 μ.Χ.	*Ο Jones χρησιμοποιεί το σύμβολο π για να περιγράψει το λόγο του κύκλου.*
1713 μ.Χ.	*Κινέζοι αυλικοί εκδίδουν το Su-li Ching-yün, το οποίο περιέχει 19 ψηφία του π.*
1719 μ. Χ.	*Ο De Lagny υπολογίζει 127 ψηφία του π.*

1722 μ.Χ.	*Ο Takebe Kenkō υπολογίζει 40 ψηφία στην Ιαπωνία.*
1748 μ. Χ.	*Ο Leonard Euler δημοσιεύει το Introductio in Analysin Infinitorum που περιλαμβάνει το θεώρημα του Euler και πολλές σειρές για το π και το π^2.*
1755 μ. Χ.	*Ο Euler ανακαλύπτει μια ταχέως συγκλίνουσα σειρά τόξου εφαπτομένης.*
1761 μ. Χ.	*Ο Johann Heinrich Lambert αποδεικνύει ότι το π είναι άρρητος.*
1775 μ. Χ.	*Ο Euler εισηγείται ότι το π είναι υπερβατικός.*
1794 μ. Χ.	*Ο Georg Vega υπολογίζει 140 δεκαδικά ψηφία του π.* *Ο Andrien Mari Legendré αποδεικνύει ότι το π και το π^2 είναι άρρητοι.*
1840 μ. Χ.	*Ο Liouville αποδεικνύει την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών.*
1844 μ. Χ.	*Οι Strassnitzky και Dase υπολογίζουν 200 ψηφία του π σε λιγότερο από δυο μήνες.*
1855 μ. Χ.	*Ο Richter υπολογίζει 500 ψηφία του π.*
1873 μ. Χ.	*Ο Hermite αποδεικνύει ότι το e είναι υπερβατικός αριθμός.*
1873-74μ. Χ	*Ο Shanks υπολογίζει 707 δεκαδικά ψηφία του π.*
1874 μ. Χ.	*Ο Τσενγκ Τσι-Χουνγκ υπολογίζει 100 ψηφία στην Κίνα.*
1882 μ. Χ.	*Ο Ferdinand Lindemann αποδεικνύει ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός.*
1945 μ. Χ.	*Ο D. F. Ferguson βρίσκει λάθος στους υπολογισμούς του Shanks από το 527^o ψηφίο και μετά.*
1946 μ. Χ.	*Ο D. F. Ferguson υπολογίζει 620 ψηφία του π.*
1947 μ. Χ.	*Ο D. F. Ferguson υπολογίζει 808 ψηφία του π, χρησιμοποιώντας έναν επιτραπέζιο υπολογιστή, σε διάστημα ενός έτους.*
1949 μ. Χ.	*Ο ENIAC υπολογίζει 2.037 ψηφία του π σε εβδομήντα ώρες.*
1954-55μ. Χ	*Ο NORC υπολογίζει 3.089 ψηφία σε δεκατρία λεπτά.*
1957 μ. Χ.	*Ο Pegasus υπολογίζει 7.480 ψηφία του π.*
1959 μ. Χ.	*Ο IBM 704 υπολογίζει 16.167 ψηφία του π.*
1961 μ. Χ.	*Οι Shanks και Wrench, με έναν IBM 7090, υπολογίζουν 100.265 ψηφία του π σε 8,72 ώρες.*

1966 μ .Χ.	*Οι Guilloud και Filliatre υπολογίζουν 250.000 ψηφία του π με έναν υπολογιστή IBM 7030.*
1967 μ. Χ.	*Οι Guilloud και Dichampt υπολογίζουν 500.000 ψηφία του π με έναν υπολογιστή CDC 6600.*
1973 μ. Χ.	*Οι Guilloud και Bouyer υπολογίζουν 1.001.250 ψηφία του π με έναν υπολογιστή CDC 7600.*
1981 μ. Χ.	*Οι Miyoshi και Kanada υπολογίζουν 2.000.036 ψηφία του π με έναν υπολογιστή FACOM M-200.*
1982 μ. Χ.	*Ο Guilloud υπολογίζει 2.000.050 ψηφία του π.*
1982 μ. Χ.	*Ο Tamura υπολογίζει 2.097.144 ψηφία του π με έναν υπολογιστή MELCOM 900II.*
1982 μ. Χ.	*Οι Tamura και Kanada υπολογίζουν 8.388.576 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI M-280H.*
1982 μ. Χ.	*Οι Tamura, Kanada και Yosino υπολογίζουν 16.777.576 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI M-280H.*
1983 μ. Χ.	*Οι Ushiro και Kanada υπολογίζουν τον Οκτώβριο 10.013.395 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI S-810/20.*
1985 μ. Χ.	*Ο Gosper υπολογίζει τον Οκτώβριο 17.526.200 ψηφία του π με έναν υπολογιστή SYMBOLICS 3670.*
1986 μ. Χ.	*Ο Bailey υπολογίζει τον Ιανουάριο 29.360.111 ψηφία του π με έναν υπολογιστή CRAY-2.*
1986 μ. Χ.	*Οι Kanada και Tamura υπολογίζουν τον Οκτώβριο 67.108.839 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI S-810/20.*
1987 μ. Χ.	*Οι Kanada, Tamura και Kubo υπολογίζουν τον Ιανουάριο 134.217.700 ψηφία του π με έναν υπολογιστή NEC SX-2.*
1988 μ. Χ.	*Οι Kanada και Tamura υπολογίζουν τον Ιανουάριο 201.326.551 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI S-820/80.*
1989 μ. Χ.	*Οι αδερφοί Chudnovsky υπολογίζουν τον Ιούνιο 480.000.000 ψηφία του π.*
1989 μ. Χ.	*Οι Kanada και Tamura υπολογίζουν τον Ιούλιο 536.870.898 ψηφία του π.*

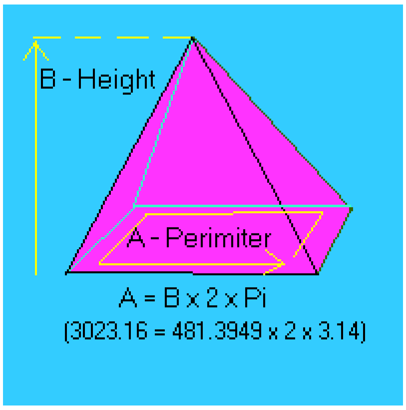
1989 μ.Χ.	*Οι αδερφοί Chudnovsky υπολογίζουν τον Αύγουστο 1.011.196.691 ψηφία του π.*
1989 μ.Χ.	*Οι Kanada και Tamura υπολογίζουν το Νοέμβριο 1.073.741.799 ψηφία του π.*
1991 μ.Χ.	*Οι αδερφοί Chudnovsky υπολογίζουν τον Αύγουστο 22.600.000.000 ψηφία του π.*
1994 μ. Χ.	*Οι αδερφοί Chudnovsky υπολογίζουν το Μάιο 4.044.000.000 ψηφία του π.*
1995 μ. Χ.	*Οι Kanada και Takahashi υπολογίζουν τον Οκτώβριο 6.442.450.938 ψηφία του π.*
1997 μ. Χ.	*Οι Kanada και Takahashi υπολογίζουν τον Ιούλιο 51.539.600.000 ψηφία του π.*
1999 μ. Χ.	*Οι Kanada και Takahashi υπολογίζουν το Σεπτέμβριο 206.158.430.000 ψηφία του π.*
2002 μ. Χ.	*Οι Kanada, Ushiro και Kuroda υπολογίζουν το Δεκέμβριο 1.241.100.000.000 ψηφία του π.*

169

• Πού εμφανίστηκε:

Όταν οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι άρχισαν να χτίζουν την πόλη τους, άρχισαν να ασχολούνται με την γεωμετρία με σκοπό την πιο άρτια και αρμονική δομή των κτηρίων. Ήδη από τον 20^{o} αιώνα π.Χ. παρατηρήθηκε ότι η περιφέρεια οποιουδήποτε κύκλου διαιρείται δια της διαμέτρου του και το αποτέλεσμα είναι πάντοτε περίπου 3. Πολύ λιγότερο ακριβής είναι μια άλλη από της αρχαιότερες τιμές του “π” την οποία συναντάμε στη Βίβλο, σύμφωνα με την οποία η κυκλική λίμνη του οίκου του Σολομώντα είχε διάμετρο 10 πήχες και περιφέρεια 30 πήχες, τοποθετώντας έτσι την τιμή ακριβώς στο 3.

Ακόμα τον συναντάμε και στις αναλογίες της Μεγάλης Πυραμίδας της Γκίζας ως τον λόγο του μήκους μιας πλευράς προς το ύψος της, ο οποίος είναι περίπου π/2.



«Παρατηρούμε ότι το π παίρνει την τιμή 3.14»

Ακόμη, αξίζει να αναφερθεί ότι η σταθερά του π εμφανίζετε στο γνωστό ποίημα « αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί » :

Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί, 3, 1 4 1 5 9

το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω, 2 6 5 3 5 8

παρήγαγεν αριθμόν απέραντον, 9 7 9

και ον, φεύ, ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι. 3 2 3 8 4 6 2 6

Το πλήθος των γραμμάτων κάθε λέξης της φράσης αυτής αντιστοιχεί *σε καθένα από τα διαδοχικά ψηφία του αριθμού π.*

Τέλος, το π κάνει και την εμφάνισή του στην διάσημη κωμωδία του Αριστοφάνη, «Όρνιθες»:

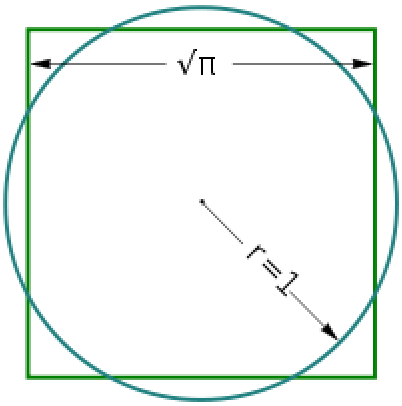
«με το ορθό ραβδί αρχίζω να μετρώ ώστε να γίνει ο κύκλος τετράγωνος για χάρη σου και στο κέντρο του θα είναι η αγορά στην οποία θα οδηγούν όλοι οι δρόμοι συγκλίνοντας στο κέντρο, όπως σ’ ένα αστέρι, που ενώ είναι κυκλοτερές στέλνει παντού ευθείες ακτίνες λαμπρές».

3^{η} Ενότητα: *Τετραγωνισμός του κύκλου*

Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά προβλήματα, έχει απασχολήσει και εξακολουθεί να απασχολεί γνωστούς μαθηματικούς από όλες τις εποχές. Η διατύπωσή του είναι απλή:

-Ζητείτε η κατασκευή *με κανόνα και διαβήτη* ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το εμβαδόν του δοθέντος κύκλου.

Το 1882 αποδείχθηκε ότι η λύση του προβλήματος αυτού είναι **αδύνατη.**



Ο πρώτος που αναφέρεται ότι ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου είναι ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500-428 π.Χ), δάσκαλος και φίλος του Περικλή.

Ο σοφιστής Αντιφών ο Αθηναίος (430 π.Χ) σκέφτηκε πως, αν εγγράψει στον κύκλο κανονικά πολύγωνα με 4,8,16,32,64,… πλευρές και προχωρήσει μέχρι οι πλευρές του πολυγώνου «ταυτιστούν» με την περιφέρεια του κύκλου, τότε αφού τα πολύγωνα τετραγωνίζονται θα τετραγωνιστεί και ο κύκλος.

Οι ιδέες αυτές του Αντιφώντα και Βρύσωνα χαρακτηρίστηκαν από τον Αριστοτέλη « ανάξιαι συζητήσεων ως αντικείμεναι προς τα αρχάς της Γεωμετρίας» χρησιμοποιήθηκαν όμως από τον Αρχιμήδη ως αφετηρία για τον τετραγωνισμό του κύκλου.

Οι Έλληνες γεωμέτρες μετά τις επανειλημμένες προσπάθειες τους να τετραγωνίσουν τον κύκλο με κανόνα και διαβήτη, στράφηκαν στην χρησιμοποίηση άλλων καμπυλών πολυπλοκότερων του κύκλου.

Ο Ιάμβλιχος (250-325 μ.Χ) αναφέρει ότι τον τετραγωνισμό του κύκλου κατόρθωσαν:

- *<u>ο Αρχιμήδης</u>* (287-212 π.Χ) με τη βοήθεια της έλικας,

- *<u>ο Νικομήδης</u>* (200 π.Χ) με την τετραγωνίζουσα,

- *<u>ο Απολλώνιος</u>* (265-170 π.Χ) με μια καμπύλη που ονόμαζε ο ίδιος «αδελφή της κοχλιοειδούς» και

- *<u>ο Κάρπος</u>* με μια καμπύλη την οποία ονομάζει «εκ διπλής κινήσεως προερχομένη»

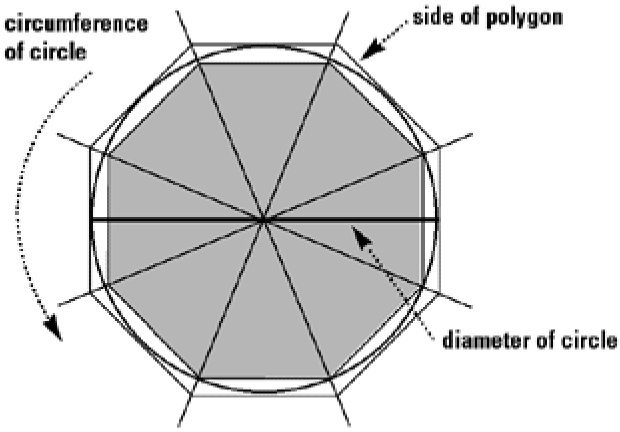
Τετραγωνίζω τον κύκλο σημαίνει ότι κατασκευάζω, με γεωμετρική ή αλγεβρική μέθοδο, ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου.

Η δυσκολία του προβλήματος συνιστάται σε 2 περιορισμούς που έθεσαν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί. Συγκεκριμένα, για να αποδεχθεί μια λύση του προβλήματος, θα πρέπει:

- Να χρησιμοποιηθεί <u>μόνο</u> κανόνας και διαβήτης, προκειμένου η απόδειξη να ανάγεται πλήρως στα θεωρήματα του Ευκλείδη, και
- Να μην πραγματοποιείται μετά από <u>άπειρο</u> αριθμό βημάτων.

Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου επιλύεται εύκολα εαν αναιρέσουμε κάποιον από τους δύο παραπάνω περιορισμούς.

Όμως, το 1882 αποδείχθηκε ότι το “π” είναι υπερβατικός αριθμός, δηλαδή δεν υπάρχει πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές των οποίων να αποτελεί ρίζα. Συνέπεια αυτού είναι ότι η σταθερά “π” δεν μπορεί να κατασκευαστεί, επομένως δεν μπορεί να τετραγωνιστεί ο κύκλος, αφού για να τετραγωνίσουμε κάποιον κύκλο θα πρέπει να έχουμε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη τις συντεταγμένες των στοιχείων.



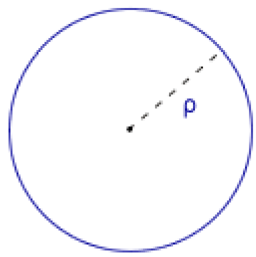
«Μέθοδος Αρχιμήδη για τον τετραγωνισμό του κύκλου»

4η Ενότητα: **Το κυνήγι των ψηφίων και η γοητεία του αριθμού “π”**

Ο αριθμός π βρίσκεται παντού.

Γνωρίσαμε το αριθμό αυτό μελετώντας τη Γεωμετρία.

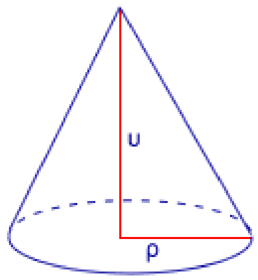
Στον κύκλο είναι: Μήκος κύκλου = π x Διάμετρος = 2 x π x Ακτίνα και η πλήρης γωνία του κύκλου είναι 2π rad.



$$E = \pi \times \rho^2$$

Προχωρώντας, διαπιστώσαμε ότι οποιοδήποτε σχήμα στο επίπεδο ή στο χώρο περιλαμβάνει καμπύλα μέρη ή επιφάνειες μετρείται με τη βοήθεια του π.

Αναφερόμαστε στον κύκλο, το τόξο του κύκλου, τον κυκλικό τομέα, τη σφαίρα, τον κύλινδρο, τον κώνο.



$$E = \pi \times \rho^2 + \pi \times \rho \times \sqrt{\rho^2 + \upsilon^2}$$

Τα μήκη των γραμμών, τα εμβαδά των επιφανειών, οι όγκοι, όλα υπολογίζονται με τύπους στους οποίους εμφανίζεται το π. Αλλά και στα σχήματα που δεν έχουν καμπύλα τμήματα κρύβεται, και πάλι το π.

Ας δούμε τα τρίγωνα. Κάθε τρίγωνο έχει τρεις γωνίες που το άθροισμα τους είναι π rad. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για τα γεωμετρικά σχήματα με περισσότερες από τρεις πλευρές.

Το π υπάρχει και στην τριγωνομετρία, στον τριγωνομετρικό κύκλο, στους τριγωνομετρικούς αριθμούς και στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Το *ημχ* και το *συνχ* είναι περιοδικές συναρτήσεις που επαναλαμβάνονται με περίοδο 2π.

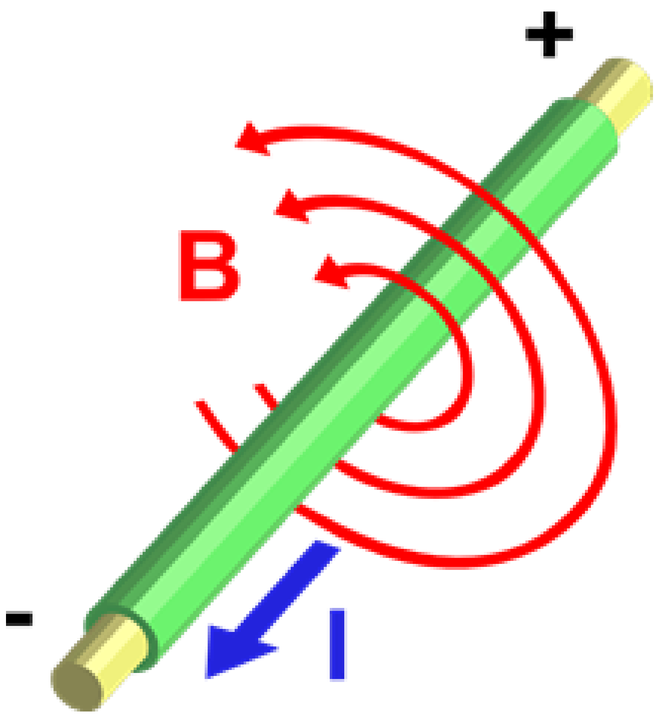
Συναντάμε το π και στη Φυσική.

Στο νόμο του Coulomb: $F = k\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$

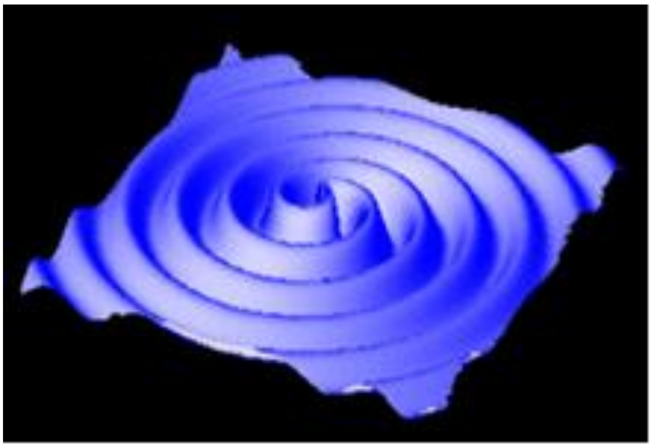
Το π κρύβεται στη σταθερά k.

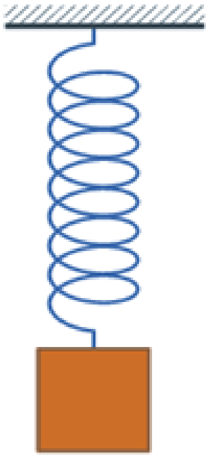
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx -8.988 * \ 10^9 \frac{N \cdot m^2}{Cb^2}$$

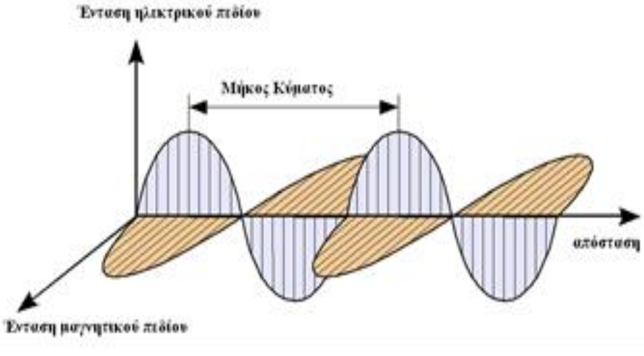
Αλλά και στον ηλεκτρομαγνητισμό για τον υπολογισμό της έντασης Β του μαγνητικού πεδίου γύρω από ρευματοφόρους αγωγούς.



Επίσης, το συναντάμε στις μηχανικές ταλαντώσεις και τα κύματα, είτε αυτά είναι μηχανικά είτε ηλεκτρομαγνητικά.





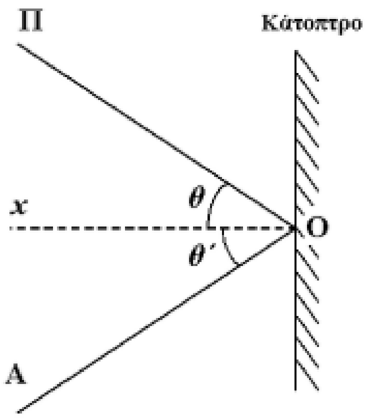

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου
Μήκος Κύματος
απόσταση
Ένταση μαγνητικού πεδίου

Τελικά, το π βρίσκεται όπου εμφανίζονται καμπύλες, αλλά και εκεί όπου υπάρχουν ευθείες. Επειδή, όμως, στη φύση δεν υπάρχουν ευθείες και επίπεδα, **το π υπάρχει παντού.**

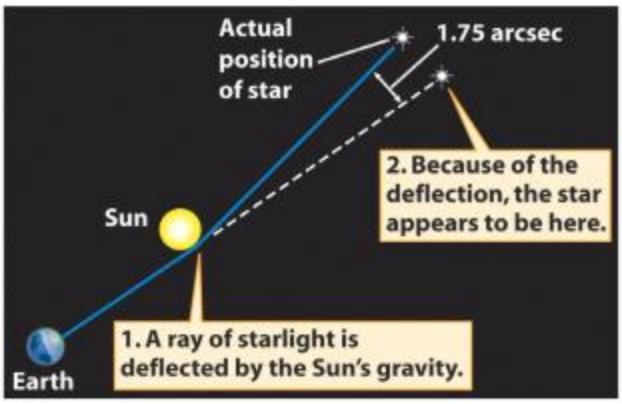
Είναι επίπεδη η επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης; Αν την παρατηρήσουμε από την όχθη, θα μας φανεί επίπεδη.

Αν απομακρυνθούμε λίγο…:

Το φως, όμως, διαδίδεται ευθύγραμμα και έτσι ανακλάται στον καθρέφτη.



Στην πραγματικότητα όμως και οι ακτίνες του φωτός καμπυλώνονται, όταν το βαρυτικό πεδίο είναι πολύ ισχυρό:



Τα «μαγικά» ποτάμια

Πριν από μερικά χρόνια, ο Χανς Χένρικ Στέλουν, καθηγητής γεωλογίας στο Cambridge, στην προσπάθειά του να ανακαλύψει και να ερευνήσει τη φύση, κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι αν διαιρέσει κάποιος το συνολικό μήκος δεκάδων ποταμών με την απόσταση που χωρίζει (σε ευθεία γραμμή) την πηγή με τις εκβολές του, προκύπτει ο περίφημος λόγος του π. Ο λόγος αυτός ήταν σχεδόν πάντα λίγο μεγαλύτερος από το 3 και πολλές φορές προσέγγιζε τον μαγικό αριθμό 3,14.

-Μερικές αξιοσημείωτες πληροφορίες για το «π»

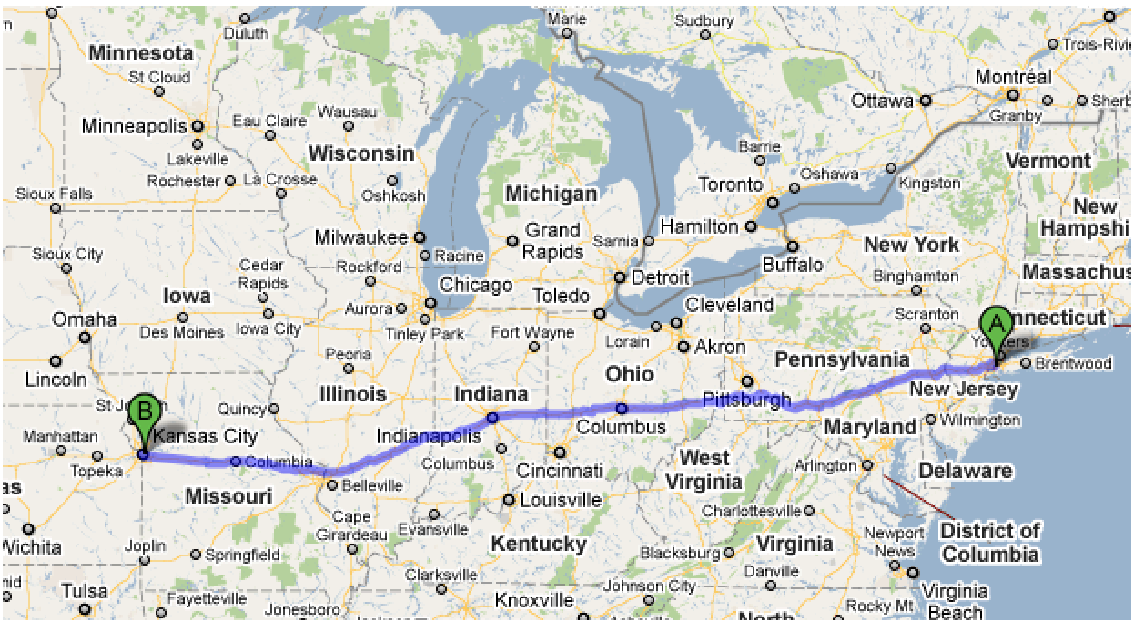
- Αν κάποιος πάρει 100.000.000 τυχαία ψηφία, στατιστικά θα υπάρχουν **περίπου** 200 περιπτώσεις όπου θα προκύψουν 5 **ίδια** ψηφία στη σειρά. Αν επιλέξεις τον ίδιο αριθμό ψηφίων από τον αριθμό π, οι περιπτώσεις θα είναι **ακριβώς** 200.

- Ο αριθμός Π μελετάται εδώ και σχεδόν 4.000 χρόνια!

- Χρησιμοποιείται σε διάφορες γνωστές σήμερα θεωρίες, όπως πχ. Θεωρία του χάους.

- Το 2002 βρέθηκαν 1,24 Τρισεκατομμύρια ψηφία του Π.

- Εάν όλα τα ψηφία του γραφόντουσαν σε μία οριζόντια σειρά, θα έφταναν από το κέντρο της Νέας Υόρκης μέχρι το Κάνσας, απόσταση ίση με 1000 μίλια!



Επίλογος:

Αν και το π είναι περισσότερο γνωστό εξαιτίας της αναλογίας του κύκλου, εμφανίζεται σε πολλές άλλες επιστήμες εκτός των μαθηματικών, όπως στη φυσική, στη μηχανική, στην αρχιτεκτονική, στη βιολογία, στην αστρονομία και στις τέχνες. Επιπλέον, βρίσκεται κρυμμένο στην περιοδικότητα των ηχητικών και των θαλάσσιων κυμάτων, είναι πανταχού παρών στη φύση και βέβαια συναντάται συνέχεια στη γεωμετρία. Κατά συνέπεια, η καλύτερη κατανόηση του αριθμού αυτού θα οδηγήσει σε βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών και της φυσικής του σύμπαντός μας.

« Όταν κοιτάζουμε στον καθρέπτη, η έγχρωμη ίρις των ματιών μας σχηματίζει ένα κυκλικό παράθυρο όπου μπορούμε να δούμε την ψυχή μας. Ίσως αυτή η κυκλικότητα να ώθησε τους πρώτους ανθρώπους να ατενίσουν με δέος τον κύκλο και, αργότερα, να τον μετρήσουν, κι ίσως να μας οδηγήσει βαθύτερα στην έρευνα του π».-*Άντεργουντ Ντάνλεϊ*

Πηγές:

- *http://el.wikipedia.org/*
- *http://eisatopon.blogspot.com/*
- *http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_149_6490.pdf*
- *http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_aroni.pdf*
- *http://ypervatikop.blogspot.com/*
- *http://users.uoa.gr/~nektar/science/history/pi_constant.htm*
- *Περιοδικά «Ευκλείδης»*
- *http://www.livepedia.gr/index.php/%CE%91%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82_%CF%80*
- *http://www.alkyone.com/mak-pi-gr/gr/cover.php*
- *http://www.madata.gr/diafora/science/55687.html*
- *http://www.newstime.gr/?in.el.article&id=27598*