

Η ΜΑΓΕΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - Ο ΑΡΙΘΜΟΣ Φ

Εργασία μαθητών: Σαρρή Σίλια(A'4)

Βαμβακινός Γιάννης (A'1)

Σταθάκη – Αμαραντίδου Ισμήνη(A'4)

Σταθόπουλος Αναστάσης(A'4)



" Ο άνθρωπος είναι ένα κλάσμα που αριθμητή έχει την πραγματική του αξία και παρονομαστή την ιδέα που έχει για τον εαυτό του. Ο αριθμητής παραμένει ο ίδιος (δηλαδή η πραγματική αξία του ανθρώπου). Γι' αυτό όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής (η ιδέα που έχει για τον εαυτό του) τόσο μικρότερο είναι το κλάσμα (δηλαδή ο άνθρωπος) ".

Περιεχόμενα :

Εισαγωγή

- αριθμός φ και Πυθαγόρας
- αριθμός φ και Fibonacci
- το Φ στη Γεωμετρία

Εφαρμογές του Φ

- τέχνη
- θρησκεία
- μουσική
- αρχιτεκτονική
- ανθρώπινος οργανισμός
- φύση

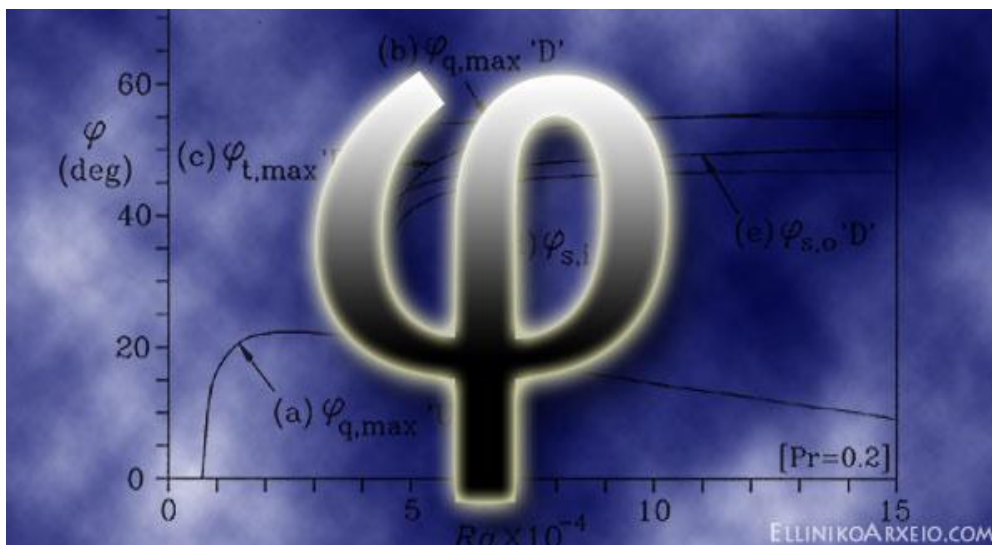

$$\Phi = 1,618\dots$$

Η ΜΑΓΕΙΑ ΠΙΣΩ ΑΠΟ ΕΝΑΝ ΑΡΙΘΜΟ

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ Φ

- Ο αριθμός Φ δε θεωρείται σε καμία περίπτωση ένα απλό μαθηματικό κόλπο, δεν πρόκειται για κάποιο θεώρημα, είναι μία ΘΕΪΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ, ένα ΜΥΣΤΗΡΙΟ ΖΩΗΣ που συναντάμε καθημερινά χωρίς, ωστόσο, να γνωρίζουμε κάτι γι' αυτό, ίσως και να του χρωστάμε περισσότερα από ότι νομίζουμε.. ίσως και την ύπαρξή μας...!!
- Η αριθμός της φύσης, της ωραιότητας, της αρχιτεκτονικής, της αρμονίας, της υγείας. Ο αριθμός της μουσικής, των λουλουδιών, των έμβιων, του ρυθμού, των αναλογιών, των πλανητών. **Ο αριθμός του σύμπαντος.**

Ο Πυθαγόρας στην αρχαία Ελλάδα αποτέλεσε τον πρώτο μαθηματικό που μίλησε για τον αριθμό Φ , μία αναλογία που όπως προέκυψε αργότερα, κρύβεται πίσω από κάθε τι τέλει. Απίστευτο κι όμως αληθινό. Ο αριθμός Φ πήρε το όνομα του από τον Φειδία, ο οποίος ήταν [Έλληνας γλύπτης](#), ζωγράφος και αρχιτέκτονας, ο οποίος έζησε τον 5ο αιώνα π.Χ. και θεωρείται ευρέως ως ένας από τους σημαντικότερους γλύπτες της [Κλασικής εποχής](#).

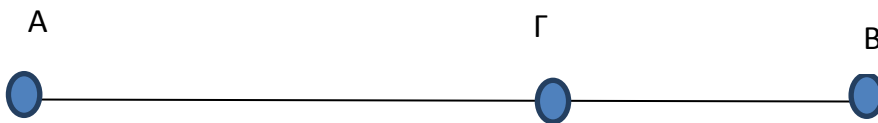


ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ;

Χρυσή τομή ενός ευθύγραμμου τμήματος (και γενικά ενός μετρήσιμου μεγέθους) είναι το σημείο εκείνο όπου **ο λόγος του συνολικού μεγέθους προς το μεγαλύτερο τμήμα είναι ίσος με τον λόγο του μεγαλύτερου τμήματος προς το μικρότερο τμήμα**. Ο λόγος σε αυτή την περίπτωση ισούται με τον ΧΡΥΣΟ ΑΡΙΘΜΟ ή αλλιώς με τον ΑΡΙΘΜΟ Φ, ο οποίος είναι ίσος με $\Phi=1,618034$

Κατ' αυτόν τον τρόπο και ο Πυθαγόρας έδειξε ότι ο λόγος του συνόλου ενός ευθυγράμμου τμήματος AB προς το μεγαλύτερο τμήμα αυτού ισούται με φ ($=1,618..$), καθώς επίσης και ότι ο λόγος του μεγαλύτερου τμήματος ενός ευθυγράμμου τμήματος προς το μικρότερο τμήμα του ισούται με το φ .

Για να δούμε την μαθηματική απόδειξη..



Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB θέλουμε να βρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

Ας ξεκινήσουμε : Έστω $A\Gamma=a$, $B\Gamma=b$, οπότε $AB=a+b$. Ας ονομάσουμε φ τον λόγο

$\frac{A\Gamma}{AB}$ δηλ. $\varphi = \frac{a}{a+b}$ τότε:

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

\Rightarrow —

Άρα, η θετική ρίζα του τριωνύμου θα είναι:

$$\text{—} = 1,6180399$$

Οι 2 ιδιαίτερες αλγεβρικές ιδιότητες που προκύπτουν είναι οι εξής:

- Το τετράγωνο του αριθμού ϕ είναι το άθροισμα του αριθμού ϕ με το 1
- Ο αντίστροφος του αριθμού ϕ είναι η διαφορά του αριθμού ϕ με το 1

Η ακολουθία Fibonacci

Πολλά χρόνια αργότερο, περίπου το 1202, δηλαδή κάπου στα 1700 χρόνια μετά τον Πυθαγόρα, ένας μεγάλος Ιταλός μαθηματικός ο Fibonacci ανακάλυψε μία ακολουθία αριθμών η οποία χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και των άλλων επιστημών και η οποία συναντάται συχνά στη φύση (σε μοτίβα όπως του λουλουδιού, τα φύλλα των φυτών κλπ.) και σχετίζονται με την ανάπτυξη κάθε οργανισμού. Γι' αυτό και οι αριθμοί Fibonacci έχουν ονομαστεί αριθμητικό σύστημα της φύσης.

Η ακολουθία αυτή έχει πρώτο όρο το 0 και δεύτερο όρο το 1, τους δύο πρώτους φυσικούς αριθμούς. Στη συνέχεια κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων.

Δηλαδή : 0, 1, 0+1=1, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Το εντυπωσιακό είναι πως ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών αυτής της ακολουθίας τείνει προς τον αριθμό Φ .

Πράγματι :

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{2} = 1,5$$

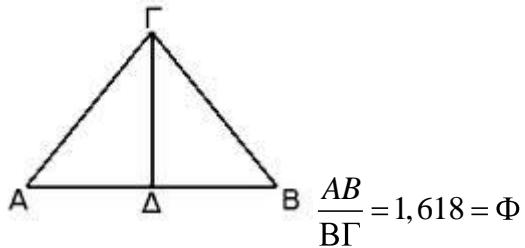
$$\frac{5}{3} = 1,6$$

....

$\frac{28.657}{17.711} = 1.6180339901 \dots$ Και σιγά σιγά οδηγούμαστε όλο και πιο κοντά στον αριθμό 1,618 = Φ

Το Φ στη γεωμετρία

1. **Χρυσό τρίγωνο** λέγεται κάθε ισοσκελές τρίγωνο στο οποίο ο λόγος της μεγάλης πλευράς προς τη μικρή είναι ίσος με «φ». Κάθε χρυσό τρίγωνο έχει γωνία κορυφής 36 μοίρες.



2. **Το αστέρι των Πυθαγορείων**. Το σύμβολο της αδελφότητας των Πυθαγορείων ήταν το «Πεντάγραμμο», δηλαδή το αστέρι που σχηματίζεται από τις πέντε διαγωνίους του κανονικού πεντάγωνου. Αποδεικνύεται ότι κάθε πλευρά διαιρεί τις άλλες δυο σε «χρυσή τομή».



π.χ. $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = 1,618 = \Phi$



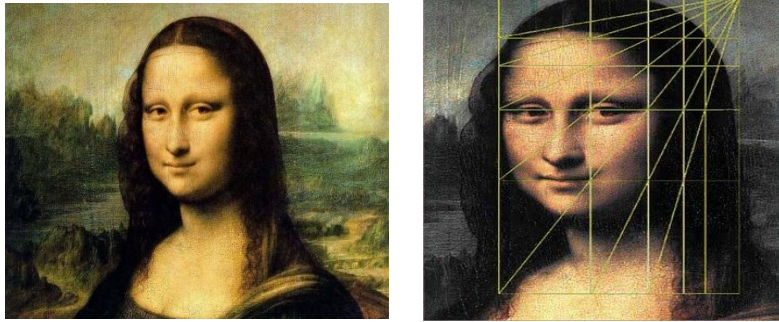
Η Σφραγίδα του Μέγα Κωνσταντίνου



Εγχάρακτο στον τοίχο
από Μοναστήρι της Γιουγκοσλαβίας
του 11^{ου} αιώνα μ.Χ.,
(πρώην ναός του Θεού της Ιατρικής - Ασκληπιού)

Το Φ στην ΤΕΧΝΗ

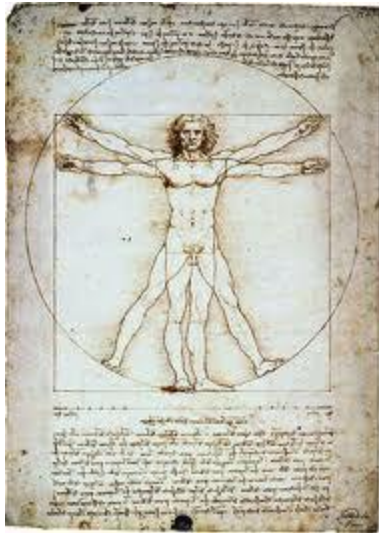
ο Λεονάρντο ντα Βίντσι ζωγράφησε το περίφημο πρόσωπο της Μόνα Λίζα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτό να χωράει σε ένα τέλειο ορθογώνιο



Η ιερή οικογένεια του Michelangelo είναι διακεκριμένο έργο εξαιτίας της αναλογίας των κυρίων φιγούρων οι οποίες σχηματίζουν ένα πεντάγωνο(χρυσό αστέρι)



Η περίφημη αυτή ανακάλυψη των μαθηματικών αναλογιών του ανθρώπινου σώματος από τον Λεονάρντο ντα Βίντσι που απεικονίζεται και στο έργο του «Ανθρωπος του Βιτρούβιου» είναι βασισμένο στην πραγματεία του Ρωμαίου μαθηματικού Μάρκου Πολλιώνα Βιτρούβιου, ο οποίος είχε μελετήσει για το ανθρώπινο σώμα, καταλήγοντας σε συμπεράσματα όπως ότι η απόσταση από την άκρη του πιγουνιού έως τη μύτη είναι το ένα τρίτο του μήκους του προσώπου, η απόσταση της γραμμής των μαλλιών έως τα φρύδια είναι το ένα τρίτο του μήκους του προσώπου κ.ο.κ.



Το Φ στη μουσική Ο Mozart διαίρεσε μεγάλο αριθμό από τις σονάτες του σε 2 μέρη, η χρονική αναλογία των οποίων αντιστοιχεί στη χρυσή τομή, στο μαγικό αριθμό ϕ (= 1,618..)

SONATA
For Violin and Piano
K. 304

Wolfgang Amadeus Mozart

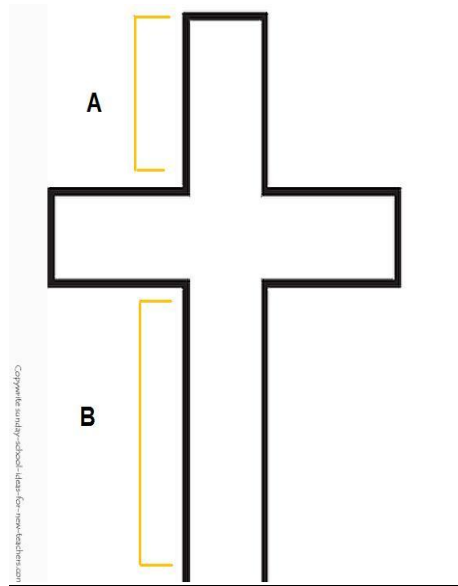
Allegro, *d = ss.*

4.

The image shows the first system of the musical score for the first movement of Mozart's Sonata for Violin and Piano, K. 304. The score is in G major and 4/4 time, marked 'Allegro, d = ss.' It features a violin part on the top staff and a piano part on the bottom staff. The piano part includes a first ending bracket and a 'ritardando' (rit.) marking. The score is written in a clear, legible font with standard musical notation.

Το Φ στη θρησκεία

Χριστιανικός σταυρός

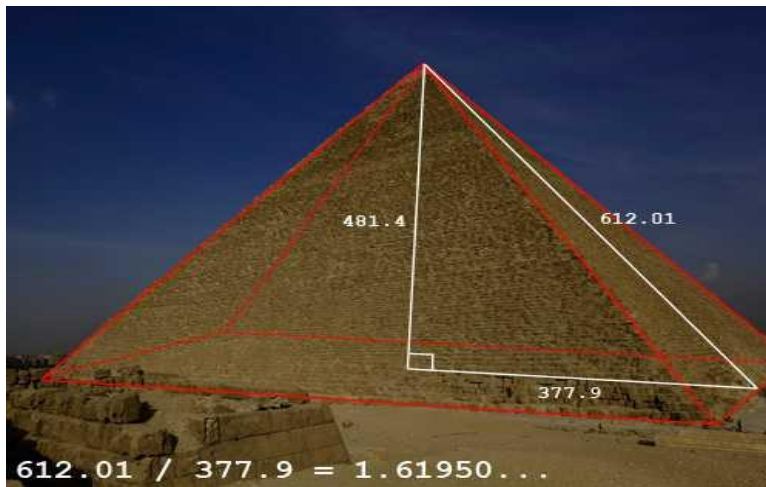


$$\frac{B}{A} = 1,618 = \Phi$$

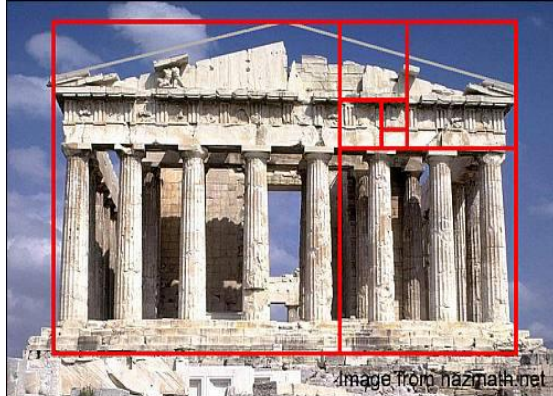
Το Φ στην ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ

Οι αρχαίοι αιγύπτιοι ήταν οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν τα μαθηματικά στη τέχνη.

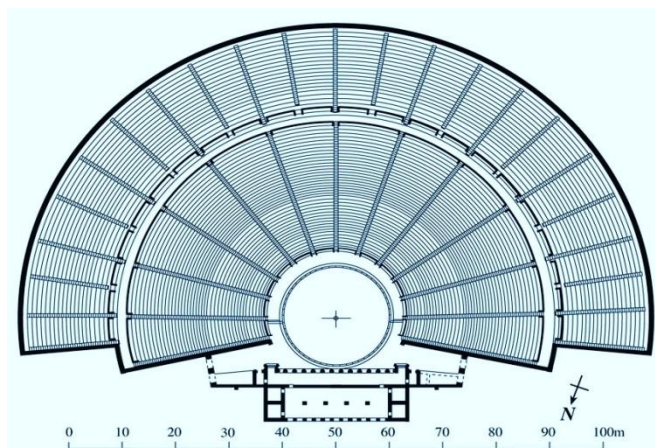
Χρησιμοποίησαν την αναλογία της χρυσής τομής **στο χτίσιμο των πυραμίδων**. Αν κάνουμε μια τομή στην μεγάλη πυραμίδα, βλέπουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο που λέγεται Αιγυπτιακό τρίγωνο (Egyptian Triangle). Η αναλογία της διαγώνιου της πυραμίδας (υποτείνουσα του τριγώνου) προς την απόσταση από το κέντρο του εδάφους (το μισό μέγεθος της βάσης) ισούται με 1,61804...



Ο **Παρθενώνας** είναι μάλλον το καλύτερο παράδειγμα μαθηματικής προσέγγισης στην τέχνη. Ο αρχαίος ναός ταιριάζει ακριβώς σε ένα χρυσό παραλληλόγραμμο. Οι υποδιαιρέσεις του παραλληλόγραμμου ευθυγραμμίζονται ακριβώς στο μεγαλύτερο μέρος τους με την αρχιτεκτονική δομή του κτίσματος. Οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται το χρυσό ορθογώνιο ως πιο όμορφο ή αρμονικό σχήμα από κάθε άλλο ορθογώνιο.



Ο χρυσός αριθμός Φ κάνει την εμφάνιση **στο θέατρο της Επιδαύρου**, απ'τα σημαντικότερα και αρχαιότερα ελληνικά θέατρα, μιας και η αναλογία σειρών των δυο διαζωμάτων $34/21=1,618=\Phi$, αλλά και η αναλογία του συνόλου των σειρών προς τοκάτω διάζωμα είναι ίση με $55/34=1,618=\Phi$.





Το Φ στη Φύση

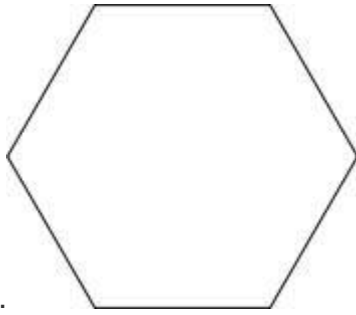
Ο Πυθαγόρας πρώτος παρατήρησε ότι τα φυτά δεν μεγαλώνουν τυχαία, αλλά σύμφωνα με ακριβείς μαθηματικούς κανόνες. Δεν είναι τυχαία δηλαδή τα όμορφα σχέδια των λουλουδιών. Οι αρχαίοι Έλληνες βρήκαν ότι τα σχέδια των λουλουδιών βασίζονται σε γεωμετρική αναλογία. Μερικά παραδείγματα είναι:

- η ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτου
- η διάταξη των πετάλων στις μαργαρίτες και τα ηλιοτρόπια. Συγκεκριμένα, στα τριαντάφυλλα κάθε πέταλο απέχει από το προηγούμενό και από το επόμενο του 222,5 μοίρες. Διαιρώντας τις 360 μοίρες με τις 222,5 προκύπτει τελικά ο αριθμός φ δηλαδή:

$$360/222,5 \approx 1,618 \text{ δηλ. } \Phi$$



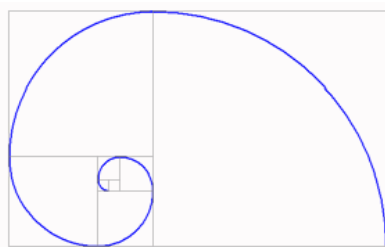
- ο τρόπος με τον οποίο η μέλισσα κατασκευάζει τα κελιά των κερύθρων. Το σχήμα της κερύθρας είναι εξαγώνο. Η επιλογή του εξαγωνικού σχήματος δεν είναι τυχαία. Αφενός μεν «κλείνει» επακριβώς το επίπεδο χωρίς κενά, αλλά είναι και το μοναδικό σχήμα με την μικρότερη περίμετρο. Δηλαδή η μέλισσα δαπανά λιγότερο κερί για την κατασκευή των κελιών της. Η πλευρά του εξαγώνου ($=0,618$) σε σχέση με την πλευρά του ισοδύναμου τετραγώνου ($=1$) έχουν σχέση τομής $0,618=1/\Phi$



$L = 0,618 \times 6 = 3,71$ και πλευρά τετραγώνου $\frac{\text{πλ.τετραγώνου}}{\text{πλ.εξαγώνου}} = \frac{1}{\Phi} = \varphi$



- Η σπείρα της χρυσής τομής είναι το σχήμα που σχηματίζεται σε αυτή την ακολουθία των χρυσών ορθογωνίων, αν εγγράψουμε σε κάθε τετράγωνο ένα τεταρτοκύκλιο.



Οι επιστήμονες έχουν διαπιστώσει ότι η λογαριθμική σπείρα εμφανίζεται σε σχήματα φυσικών αντικειμένων με εντελώς διαφορετικές ιδιότητες. Στη μικρότερη κλίμακα εμφανίζεται στα όστρακα πολλών θαλάσσιων οργανισμών, όπως για παράδειγμα είναι ο ναυτίλος. Στην ενδιάμεση κλίμακα εμφανίζεται στο σχήμα των κυκλώνων, όπως αποτυπώνεται χαρακτηριστικά στις φωτογραφίες των μετεωρολογικών δορυφόρων. Τέλος στη μεγαλύτερη δυνατή κλίμακα εμφανίζεται στο σχήμα των σπειροειδών γαλαξιών, τεράστιων σχηματισμών από εκατοντάδες δισεκατομμύρια αστέρια, τους οποίους μπορούμε να απολαύσουμε στις φωτογραφίες των σύγχρονων τηλεσκοπίων.

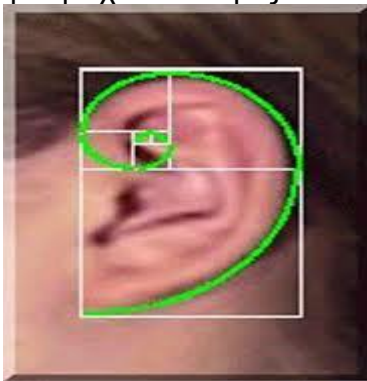


- η απόσταση μεταξύ των **πλανητών** μπορεί να προσδιοριστεί με ικανοποιητική προσέγγιση από τον αριθμό Φ .



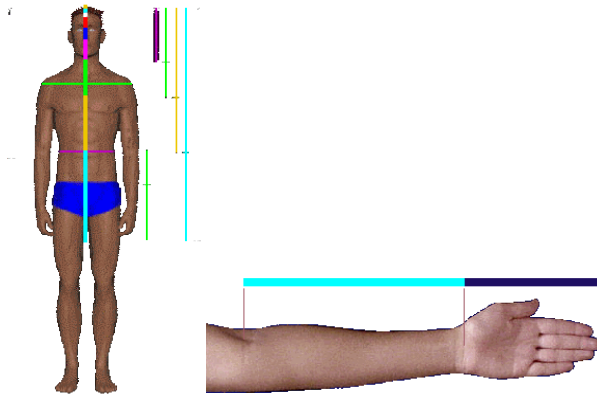
Το Φ στον άνθρωπο

- το ανθρώπινο σώμα έχει δομηθεί και αναπτύσσεται σε αναλογίες Φ . Η **απόσταση ζωτικών οργάνων** (π. χ εγκέφαλος-καρδιά, στομάχι, κ.λ.π) εμπεριέχει αναλογίες Φ .



Ο μεγάλος ζωγράφος της Αναγέννησης Λεονάρντο ντα Βίντσι θεωρούσε ότι από όλους τους δυνατούς τύπους ανθρώπινων σωμάτων φαίνεται πιο «φυσικός» στο ανθρώπινο μάτι εκείνος στον οποίο ο ομφαλός χωρίζει το σώμα σε μέσο και άκρο λόγο. Έτσι για έναν «μέσο» άνθρωπο με ύψος

- 1,80 μέτρα, ο ομφαλός βρίσκεται σε απόσταση 1,11 από το έδαφος.



- πολλές "ανατολίτικες θρησκείες" και κινήματα στα πλαίσια της διδασκαλίας τους για ΔΙΑΛΟΓΙΣΜΟ και "αυτοσυγκέντρωση" και σε εκείνες τις προσπάθειες για διαλογισμό ή στο λεγόμενο "γιόγκα" η στάση του Ανθρώπινου σώματος (η οκλαδόν) γίνεται κατά αυτό τον τρόπο έτσι ώστε τα "κεντρικά - κομβικά" σημεία του σώματος να βρίσκονται σε μία αναλογία μεταξύ τους ΧΡΥΣΗ, σε αναλογίες Φ



- Εξάλλου είναι γνωστό ότι οι περισσότεροι Πλαστικοί χειρουργοί στις επεμβάσεις τους χρησιμοποιούν τον ΧΡΥΣΟ ΑΡΙΘΜΟ και επιδιώκουν να επιτύχουν αναλογίες βασισμένες στο θεώρημα της Χρυσής τομής και τον Χρυσό αριθμό φ.

- Η χρυσή αναλογία του φ εντοπίζεται επίσης και στην **οδοντιατρική**.



Τέλος..

Η λίστα με τις εμφανίσεις της Χρυσής Τομής θα μπορούσε να είναι ατελείωτη και αν προσπαθούσαμε να δώσουμε μια εξήγηση θα άγγιζε τα όρια του μυστικισμού. Το ερώτημα που απασχολεί τους φιλοσόφους ανά τους αιώνες, για το αν τα μαθηματικά είναι ανθρώπινη εφεύρεση ή προϋπήρχαν και εμείς τα ανακαλύψαμε, φαίνεται απλό, αρκεί κάποιος να θαυμάσει το πώς ένας αριθμός είναι ο αγαπημένος της ίδιας της φύσης. Πάντως, ένα πράγμα είναι σίγουρο: στα μαθηματικά κρύβεται μια απaráμιλλη ομορφιά που τελικά αντικατοπτρίζει την ίδια τη φύση. Και αν δεν υπήρχε αυτή η ομορφιά, τότε δεν θα άξιζε να ζούμε..

Βιβλιογραφία

- www.wikipedia.gr
- www.livepedia.gr
- www.asxetos.gr
- www.e-telescope.gr
- www.users.sch.gr/kassetas/ed0math24.htm
- www.portal.kathimerini.gr
- www.youtube.com

Περιοδικό Β'Ευκλείδης Τεύχος 71

Περιοδικό Β'Ευκλείδης Τεύχος 81

Βιβλίο «Μαθηματικά Μυστήρια» του Calvin C.Clawson