«Η μαγεία των αριθμών»

Αρχή της καταμέτρησης, ιδιαίτεροι αριθμοί

Εργασία Α΄ Τετραμήνου 2011
΄Β Τοσίτσειο – Αρσάκειο Εκάλης
Υπ. καθηγητές: Ν. Μπέντα, Α. Χατζηορφανός
Μαθητές:
Αγγελόπουλος Νίκος, Α1
Βαλαβάνης Βασίλης, Α1
Δαμάσκος Κώστας, Α1
Φαγκούντες - Παπούδος Σπύρος, Α4
Φραγκοπούλου Μαρία, Α4

Περιεχόμενα

Η χρησιμότητα των μαθηματικών

Πάρα πολλοί από εμάς πολλές φορές έχουμε αναρωτηθεί, «γιατί μαθαίνουμε μαθηματικά» και νομίζουμε ότι τα μαθηματικά είναι μόνο εξισώσεις, ταυτότητες και γεωμετρικά προβλήματα. Υπάρχουν αυτοί που υποφέρουν από φοβία για αυτά και από δυσπιστία, κουνούν αρνητικά το κεφάλι και αρνούνται κατηγορηματικά να προχωρήσουν προς το μέρος τους και να κοιτάξουν βαθύτερα με σκοπό να ανακαλύψουν, τη χρησιμότητά τους σε καθημερινό επίπεδο.

Η μελέτη των μαθηματικών αποτελεί το κυνήγι μιας κρυμμένης αλήθειας και φυσικά, τροφή για το πνεύμα. Ακόμη, δημιουργεί δομημένο τρόπο σκέψης και ενισχύει τον επαγωγικό συλλογισμό στον κάθε άνθρωπο.
Φανταστείτε έναν κόσμο χωρίς αριθμούς. Συλλογιστείτε τις διαφορές με τον σημερινό και τις δυσκολίες
που θα αντιμετωπίζαμε σε καθημερινή βάση.

Η αρχή της καταμέτρησης

Ο άνθρωπος χρειάστηκε 1.000.000 χρόνια για να οδηγηθεί στην αφηρημένη έννοια των αριθμών.

Ο Homo sapiens (300.000 χρόνια πριν) κάνει μια μικρή αρίθμηση με κλαδιά.

Ο Homo sapiens sapiens (100.000 χρόνια πριν) χρησιμοποιεί κάποιες αριθμητικές λέξεις.

Οι κυνηγοί- τροφοσυλλέκτες (70.000-20.000 χρόνια πριν) καταλάβαιναν την απλή πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και την αφαίρεση. Το μοίρασμα της τροφής τους σημαίνει ότι κατανοούσαν τη διαίρεση.

Η παλαιότερη ένδειξη αριθμητικής καταγραφής βρέθηκε στη Σουαζιλάνδη της Νότιας Αφρικής και είναι μια περόνη μπαμπουίνου με 29 εμφανείς εγκοπές που χρονολογείται από το 35.000 π.Χ. Μοιάζει με τα «ημερολογιακά ραβδιά» που ακόμα χρησιμοποιούν στη Ναμίμπια για να καταγράφουν την παρέλευση του χρόνου. Άλλα κόκαλα, της νεολιθικής περιόδου, έχουν βρεθεί στη Δυτική Ευρώπη. Μια κερκίδα λύκου που βρέθηκε στην Τσεχία και χρονολογείται από το 30.000 π.Χ. φέρει 55 εγκοπές σε δύο σειρές ανά πέντε, οι οποίες μάλλον αποτελούν καταγραφή θηραμάτων.

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα ευρήματα είναι το αποκαλούμενο κόκαλο Ισάνγκο, που βρέθηκε στις όχθες της λίμνης Έντουαρντς, ανάμεσα στην Ουγκάντα και το Κονγκό. Έχει χρονολογηθεί το 20.000 π.Χ. και μοιάζει να είναι κάτι παραπάνω από πίνακας θηραμάτων. Μικροσκοπική ανάλυση αποκάλυψε πρόσθετες εγκοπές, οι οποίες μπορούν να συσχετισθούν με τις φάσεις της σελήνης.

Μέσω της αστρονομίας, της αστρολογίας ή της κοσμολογίας, ο ουρανός άσκησε τη μεγαλύτερη επίδραση στην εξέλιξη των μαθηματικών.

Το 2500 π.Χ. οι Σουμέριοι ζύγιζαν, υπολόγιζαν τη γη σε «σαρ», μετρούσαν τα υγρά σε «κα», χρησιμοποιούσαν κλάσματα και είχαν σύστημα αριθμών με βάση το 60.

Το 2.000-538 π.Χ. οι Βαβυλώνιοι έφτασαν σε υψηλό επίπεδο μαθηματικής κουλτούρας, μεγαλύτερη των σύγχρονών τους Αιγυπτίων.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα το είχαν ανακαλύψει και οι Βαβυλώνιοι τον 16ο π.Χ. αιώνα (1.000 χρόνια πριν από τη γέννηση του Πυθαγόρα χωρίς όμως να το αποδεικνύουν). Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν τις τέσσερις πράξεις και τις ρίζες, λύνανε προβλήματα πρώτου και δεύτερου βαθμού, υπολόγιζαν εμβαδόν ορθογωνίων τριγώνων, παραλληλόγραμμων, τραπεζίων καθώς και το εμβαδόν του κύκλου (π=3 αντί π=3,14).

Το αριθμητικό τους σύστημα είχε ως βάση το 60 , ήταν μη ψηφιακό, θεσιακό, χωρίς υποδιαστολή και χωρίς μηδέν. Υποστηρίζεται ότι γνωρίζανε και το δεκαδικό σύστημα.

Το εξηνταδικό σύστημα των Βαβυλωνίων έχει επιβιώσει μέχρι σήμερα στο μέτρημα του χρόνου. Έτσι π.χ. όταν οι Βαβυλώνιοι ήθελαν να εκφράσουν τον αριθμό 75, έλεγαν «1,15», όπως κι εμείς σήμερα τα 75 λεπτά τα εκφράζουμε σαν 1 ώρα και 15 λεπτά.

Το 5000-332 π.Χ. οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούν σύστημα αριθμών με βάση το 10. Το σύστημά τους ήταν δεκαδικό, επαναληπτικό, μη θεσιακό.

Το 2852 π.Χ. ο Κινέζικος πολιτισμός χρησιμοποιεί σύστημα αριθμών με βάση το 60. Κάνανε αστρονομικούς υπολογισμούς 1500 χρόνια πριν από τους αρχαίους Έλληνες.

Γνώριζαν γραμμικές εξισώσεις, αόριστες εξισώσεις, αρνητικούς αριθμούς και το π.. Τα μαθηματικά τους ήταν ανώτερα των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων.

Το παλαιότερο κινέζικο μαθηματικό κείμενο είναι το Τσόου Πέϊ Σαουντσινγκ, που γράφτηκε μεταξύ του 500 και του 200 π.Χ.

Όσα έδωσαν οι Έλληνες...

Φυσικά δεν θα μπορούσαμε να παραλείψουμε την συνεισφορά των Ελλήνων στα μαθηματικά. Πριν από αυτήν τη σημαντική αναφορά θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι παρόλο που οι Έλληνες είναι γνωστοί ανά τον κόσμο για τα επιτεύγματά τους σε πολλούς τομείς, στα μαθηματικά, είναι πολύ πιθανό μερικές από αυτές τις ανακαλύψεις να είχαν πραγματοποιηθεί από άλλους λαούς, αλλά επειδή δεν είχαν αποτυπωθεί γραπτά από αυτούς, τα εύσημα πήραν οι Έλληνες.

Βέβαια όπως είναι ευρέως γνωστό, οι Έλληνες, έθεσαν τις βάσεις και έθεσαν ερωτήματα τα οποία δεν έχουν απαντηθεί μέχρι σήμερα. Μερικοί Έλληνες των οποίων η συμβολή στον μαθηματικό κόσμο είναι μεγάλη, είναι ο Θαλής, ο Ευκλείδης, ο Διόφαντος, ο Ερατοσθένης, ο Αναξαγόρας, ο Αρχιμήδης και ο Πυθαγόρας.

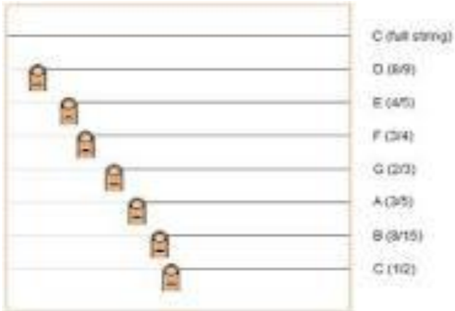
Ας δούμε πιο αναλυτικά τον Θαλή τον Μιλήσιο (634-548 π.Χ.) και τον Πυθαγόρα (580-500 π.Χ.)

Ο Θαλής ίδρυσε σχολή στη Μίλητο, όπου δίδασκε μαθηματικά και φιλοσοφία. Ακόμα θεωρείται ένας από τους 7 σοφούς άνδρες της αρχαίας Ελλάδας. Ο αριθμός των γεωμετρικών ανακαλύψεών του είναι μεγάλος, αλλά η μεγαλύτερή του επιτυχία είναι η χρήση της παραγωγικής μεθόδου.

Ο Πυθαγόρας, μαθητής του Θαλή, φαίνεται να ταξίδεψε κι αυτός όπως και ο Θαλής στην Αίγυπτο και στη Βαβυλώνα για να διδαχθεί από αρχαίους ιερείς. Οι ιδέες του Πυθαγόρα όμως ήταν πολύ διαφορετικές από αυτές του Θαλή.

Ενώ ο Θαλής θεωρούσε τα μαθηματικά ως αντικείμενα του πνεύματός ο Πυθαγόρας επέκτεινε αυτή την έννοια και ισχυρίστηκε ότι τα μαθηματικά δεν ήταν μόνο πνευματικές οντότητες αλλά ότι αποτελούσαν δομικά στοιχεία ολόκληρης της πραγματικότητας και του κόσμου.

Μια από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις του ήταν η σχέση μιας τεντωμένης χορδής με τον ήχο που παράγει όταν διεγείρεται.



Παρατήρησε ότι όταν το αρχικό μήκος της χορδής ελαττώνεται στο μισό, η συχνότητα του ήχου που παράγεται είναι μια οκτάβα ψηλότερα σε σχέση με την αρχική συχνότητα.

Άρα, κατά συνέπεια, όταν τα μήκη της χορδής έχουν λόγο ½, παράγονται ήχοι που βρίσκονται σε αρμονία.

Αυτή η ανακάλυψη για τα μουσικά διαστήματα (στα οποία περιλαμβάνεται η οκτάβα με λόγο 2/1 , η πέμπτη με λόγο 3/2 και η τέταρτη με λόγο 4/3) ενέπνευσε τους Πυθαγόρειους να θεωρήσουν τον αριθμό 10 ιερό αφού οι τέσσερεις αριθμοί που εμφανίζονται στους παραπάνω λόγους δηλ. 1, 2, 3, 4 έχουν άθροισμα 10 (1+2+3+4=10) .

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες χειρίζονταν καλά τις 4 πράξεις αφού ήταν άριστοι έμποροι.

Αλλά οι Έλληνες στοχαστές θεωρούσαν τις 4 πράξεις ως υποδεέστερες από την μελέτη της θεωρίας των αριθμών.

Η θεωρία των αριθμών είναι η μελέτη των χαρακτηριστικών των αριθμών και όχι ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιούμε τους αριθμούς για να κάνουμε υπολογισμούς.

Οι Έλληνες δεν γνώριζαν τους αρνητικούς αριθμούς και θεωρούσαν τα κλάσματα απλώς ως λόγους των φυσικών αριθμών και οχι ως αριθμούς από τη φύση τους.

Το παλαιότερο χαρακτηριστικό που ανακάλυψαν για τους φυσικούς αριθμούς ήταν ότι μπορεί να είναι είτε άρτιοι είτε περιττοί. Άρτιος αριθμός είναι κάθε αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί ακριβώς με το 2, έτσι περιττός είναι κάθε αριθμός που δεν μπορεί να διαιρεθεί ακριβώς με το 2 ή απλά ένας άρτιος+1. Μια ακόμη σημαντική διάκριση έγινε με βάση τους περιττούς και τους άρτιους αριθμούς: αρχίζοντας από το 1, κάθε μεθεπόμενος αριθμός είναι περιττός και αρχίζοντας από το 2 κάθε μεθεπόμενος αριθμός είναι άρτιος.

ΤΡΙΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι Έλληνες, εξέτασαν τους αριθμούς από γεωμετρική άποψη. Ο γεωμετρικός τους συμβολισμός γίνεται με την χρήση γεωμετρικών σχημάτων, στα οποία οι μονάδες των αριθμών παρουσιάζονται ως σημεία.
Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί χαρακτηρίζονται ως τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι, εξάγωνοι, κύβοι, κλπ.

Τρίγωνος π.χ. είναι ό αριθμός 3 γιατί μπορεί να συμβολιστεί με 3 σημεία, τα οποία σχηματίζουν ένα τρίγωνο και το ένα είναι η κορυφή ενός ισοσκελούς τριγώνου.

Δεύτερος κατά σειρά τρίγωνος αριθμός είναι ο 6, του οποίου η διάταξη των μονάδων (που συμβολίζεται με σημεία) σχηματίζει το παρακάτω σχήμα (σχήμα 1).

Πάλι ένα σημείο είναι η κορυφή ενός ισοσκελούς τριγώνου.

Ακόμη συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παρατήρησαν οτι αν υπολόγιζαν διαδοχικά αθροίσματα φυσικών αριθμών, όπως εμφανίζονται στην αριθμητική ακολουθία, κατέληγαν πάντα σε τριγωνικούς.

Παρατηρούμε ότι:

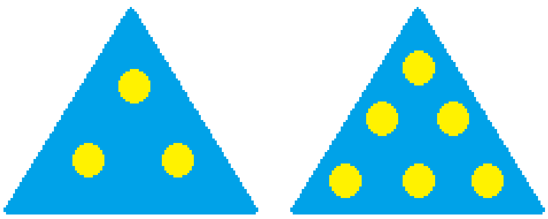
1+2 = 3

1+2+3 = 6

1+2+3+4 = 10

1+2+3+4+5 = 15

Βέβαια αυτή η διαδικασία θα μπορούσε να συνεχιστεί ατελείωτα.

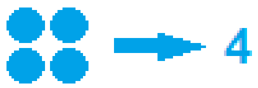


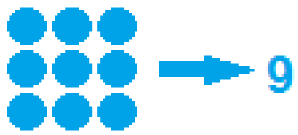
Σχήμα 1

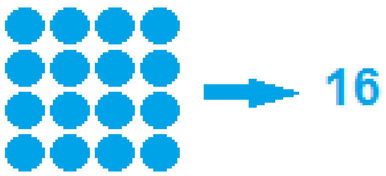
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Με τον ίδιο τρόπο, κάποιοι αριθμοί, απεικονιζόμενοι με βότσαλα, μπορούν να σχηματίσουν τετράγωνα και ονομάζονται τετράγωνοι αριθμοί.

Για παράδειγμα,







Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Πυθαγόρειοι, ανακάλυψαν πως το άθροισμα διαδοχικών περιττών αριθμών είναι πάντοτε τετραγωνικός αριθμός.

Πράγματι, βλέπουμε ότι :

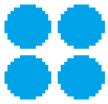
1+3 = 4

1+3 + 5 = 9

1+3+5+7 = 16

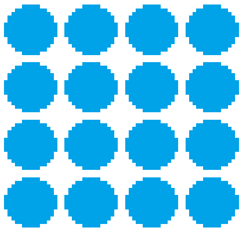
1+4+3+5+7+9 = 23 κλπ

Το άθροισμα της μονάδας και του επόμενου περιττού αριθμού δίνει τον τετράγωνο αριθμό 4 (βλέπε σχήμα 3).



Σχήμα 3

Με όμοια λογική, παίρνουμε τον επόμενο περιττό αριθμό, το 5, και τον προσθέτουμε στο σχήμα μας. Ο αριθμός που προκύπτει είναι ο επόμενος τετράγωνος αριθμός, το 9. Όμοια, προχωράμε με το 7 και ου τω καθεξής. (βλέπε σχήμα 4)



Σχήμα 4

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οι αριθμοί σταδιακά γράφονται με τον εξής τρόπο: 4 = 2x2, 9 = 3x3, 16 = 4x4 και ου τω καθεξής. Ακόμη, παρατηρούμε ότι οι τετράγωνοι αριθμοί παράγονται από τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με τον εαυτό του δηλαδή

$1= 1x1= 1^2$, $4= 2x2 = 2^2$, $9 = 3x3 = 3^2$, $16 = 4x4 = 4^2$ …

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανακαλύψεις κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι $1= 1^2$, $1+3 = 2^2$, $1+3+5= 3^2$, $1+3+5+7=4^2$

δηλαδή

ένας τετράγωνος αριθμός $ν^2$ προκύπτει αν προσθέσουμε

ν διαδοχικούς περιττούς

π.χ. $6^2 = 1+3+5+7+9+11$

ΕΠΙΜΗΚΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Κατά αυτόν τον τρόπο εξέτασαν και τα αθροίσματα των άρτιων αριθμών, διατεταγμένων σε σειρές με αφετηρία το 2.
Έτσι προκύπτει η ακόλουθη αριθμητική σειρά:

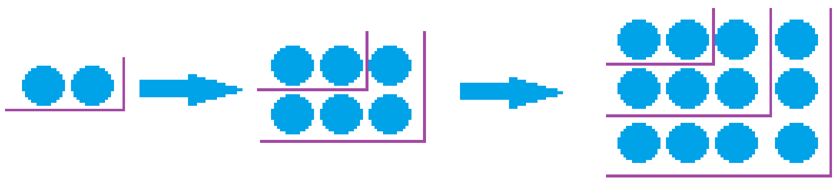
2 + 4 = 6 ή (3x2)
2 + 4 + 6=12 ή (3x4)
2 + 4 + 6 + 8 = 20 ή (4x5).

Τα αθροίσματα τους είναι άρτιοι αριθμοί, οι οποίοι μπορούν να αναλυθούν σε 2 παράγοντες εκ των οποίων ο πρώτος ισούται με το μισό του τελευταίου όρου της σειράς και ο δεύτερος με το μισό αυξημένο κατά ένα.

π.χ. 2+4+6+8 = 20 όπου 20 = 4x5
και πιο αναλυτικά,

$$4 = \frac{8}{2} \qquad 5 = \frac{8}{2} + 1$$

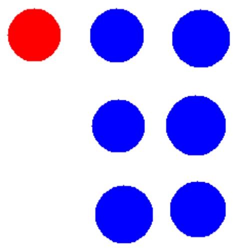
Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται επιμήκεις, και παριστάνονται με ένα ορθογώνιο. Με αφετηρία το 2 προσθέτουμε κάθε φορά τον επόμενο άρτιο αριθμό (2,4,6,..κλπ) (βλέπε σχήμα 5).



Σχήμα 5

Πρώτοι αριθμοί

Όμως, μελετώντας τους τετράγωνους και τους επιμήκεις αριθμούς, οι αρχαίοι Έλληνες παρατήρησαν πως υπήρχαν αριθμοί οι οποίοι δεν μπορούνε να απεικονιστούνε με βότσαλα σε τετράγωνη ή ορθογώνια διάταξη γιατί πάντα περίσσευε ή χρειάζονταν ένα βότσαλο.



πχ 6+1=7

Στα μαθηματικά τώρα πια, πρώτο αριθμό ονομάζουμε έναν φυσικό αριθμό, μεγαλύτερο της μονάδας, με την ιδιότητα οι μόνοι φυσικοί διαιρέτες του να είναι η μονάδα και ο εαυτός του.
Το μηδέν και το ένα δεν θεωρούνται πρώτοι αριθμοί.
Συνηθίζεται οι πρώτοι αριθμοί να συμβολίζονται με το γράμμα p (από το αγγλικό prime).
Για παράδειγμα: το 11 είναι πρώτος γιατί διαιρείται ακριβώς μόνο με το 1 και το 11(δηλ. τον εαυτό του).
Ένας λόγος που οι πρώτοι αριθμοί είναι τόσο σημαντικοί είναι γιατί έχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες.

1. Ο αριθμός 2 είναι ο μόνος άρτιος (ζυγός) πρώτος αριθμός.
Όλοι οι υπόλοιποι άλλοι πρώτοι είναι περιττοί (μονοί).
πχ 3, 5, 7, 9 πρώτοι αριθμοί και περιττοί

2. Αν ο p είναι πρώτος και διαιρεί το γινόμενο α·β για κάποιους ακέραιους α, β, τότε ο p διαιρεί το α ή το β. (Ευκλείδης).
πχ έστω p= 5 και α·β= 40 τότε 40=4·10 όπου 10/5=2.

3. Αν p πρώτος και α ακέραιος, τότε το $α^p − α$ διαιρείται από το p

(Θεώρημα του Φερμά).

πχ έστω p=3 και α=4 τότε 4^3- 4= 64- 4= 60 όπου 60/3= 20.

4. Όλοι οι πρώτοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα, εκτός του 2 και του 5, έχουν ως τελευταίο ψηφίο ένα από τα 1, 3, 7 ή 9, διότι οι αριθμοί που τελειώνουν σε 0, 2, 4, 6 και 8 είναι πολλαπλάσια του 2 ενώ οι αριθμοί που τελειώνουν σε 0 ή 5 είναι πολλαπλάσια του 5.

5. Οι πρώτοι αριθμοί είναι ένα από τα αντικείμενα της θεωρίας αρθμών και είναι μια πολύ ενεργή ερευνητικά περιοχή των μαθηματικών.

Διάσημες άλυτες εικασίες που σχετίζονται με τους πρώτους αριθμούς είναι η εικασία του Γκόλντμπαχ και η εικασία του Ρίμαν.

Στην πρώτη, διατυπώνεται η εικασία πως *κάθε άρτιος φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα 2 πρώτων αριθμών*, αλλά δεν έχει αποδειχθεί.
π.χ. 6= 3+3, 8= 3+5, 10= 3+7= 5+5,...κτλ.

Στην εικασία του Ρίμαν, απ' την άλλη, τίθεται το ερώτημα για το *αν υπάρχει τύπος με τον οποίο θα βρίσκουμε τον αριθμό των πρώτων που είναι μικρότεροι από κάποιον συγκεκριμένο αριθμό*. Το ινστιτούτο Clay δίνει έπαθλο 1εκατομμύριο $ σε όποιον καταφέρει να βρει την απάντηση στην υπόθεση Ρίμαν.

Ο Ερατοσθένης επινόησε μια μέθοδο για την εύρεση της ακολουθίας των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του ν, η οποία είναι η γνωστότερη μέθοδος αν και δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. (Κόσκινο του Ερατοσθένη)

Για παράδειγμα, μέχρι το 300 η διαδικασία έχει ως εξής:

Κρατάμε τον πρώτο αριθμό 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300

στη συνέχεια κρατάμε τον επόμενο πρώτο αριθμό, δηλαδή το 3, και διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του.

	2	3		5		7		9		11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29		31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49		51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69		71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89		91		93		95		97		99	
101		103		105		107		109		111		113		115		117		119	
121		123		125		127		129		131		133		135		137		139	
141		143		145		147		149		151		153		155		157		159	
161		163		165		167		169		171		173		175		177		179	
181		183		185		187		189		191		193		195		197		199	
201		203		205		207		209		211		213		215		217		219	
221		223		225		227		229		231		233		235		237		239	
241		243		245		247		249		251		253		255		257		259	
261		263		265		267		269		271		273		275		277		279	
281		283		285		287		289		291		293		295		297		299	

Κάνουμε το ίδιο με το 5,

	2	3		5		7				11		13				17		19	
		23		25				29		31				35		37			
41		43				47		49				53		55				59	
61				65		67				71		73				77		79	
		83		85				89		91				95		97			
101		103				107		109				113		115				119	
121				125		127				131		133				137		139	
		143		145				149		151				155		157			
161		163				167		169				173		175				179	
181				185		187				191		193				197		199	
		203		205				209		211				215		217			
221		223				227		229				233		235				239	
241				245		247				251		253				257		259	
		263		265				269		271				275		277			
281		283				287		289				293		295				299	

και συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία με τον επόμενο πρώτο αριθμό έως ότου ο επόμενος πρώτος p να είναι $p^2>300$.
Τότε η διαδικασία έχει τελειώσει και στον πίνακα βρίσκονται μόνο οι πρώτοι αριθμοί μέχρι το 300.

	2	3		5		7				11		13				17		19	
		23						29		31						37			
41		43				47						53						59	
61						67				71		73						79	
		83						89								97			
101		103				107		109				113							
						127				131						137		139	
								149		151						157			
		163				167		169				173						179	
181										191		193				197		199	
										211									
221		223				227		229				233						239	
241						247				251						257			
		263						269		271						277			
281		283						289				293						299	

Αριθμοί με ξεχωριστές ιδιότητες

Στα μαθηματικά, συναντάμε συχνά αριθμούς με σπάνιες και ενδιαφέρουσες ικανότητες. Ας δούμε μερικούς από αυτούς.

Δίδυμοι αριθμοί

Ως υποκατηγορία των πρώτων αριθμών μπορούν να θεωρηθούν οι δίδυμοι αριθμοί.
Δίδυμοι πρώτοι ονομάζονται οι πρώτοι αριθμοί που η διαφορά τους είναι 2,
π.χ 11 και 13, 17 και 19, 1.000.037 και 1.000.039.
Ένα γνωστό άλυτο πρόβλημα της Θεωρίας των αριθμών είναι *η εικασία των Διδύμων*. Με άλλα λόγια, η εικασία διατυπώνεται με το ερώτημα αν είναι άπειρα τα ζευγάρια πρώτων αριθμών τα οποία να έχουν διαφορά ίση με 2.

Τέλειοι Αριθμοί

Ένας αριθμός ονομάζεται τέλειος αν ισούται με το άθροισμα των διαιρετέων του.
Οι δυο πρώτοι τέλειοι είναι ο 6 και ο 28 καθώς
6= 1+2+3 και 28= 1+2+4+7+14.
Όλοι οι γνωστοί τέλειοι αριθμοί μέχρι σήμερα είναι άρτιοι και αποτελεί ένα άλυτο πρόβλημα το *αν υπάρχουν περιττοί τέλειοι αριθμοί*.
Αυτό, καθώς και το *αν οι τέλειοι αριθμοί είναι άπειροι* είναι ανοιχτά προβλήματα από την εποχή των Πυθαγορείων.

Υποκατηγορία των τέλειων αριθμών αποτελούν οι υπερτέλειοι και οι ελλιπείς αριθμοί.
Υπερτέλειους ονομάζουμε τους αριθμούς των οποίων οι διαιρέτες έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό ενώ ελλιπείς τους αριθμούς με άθροισμα των διαιρετέων τους μικρότερο απ' τον ίδιο τον αριθμό.
Παράδειγμα υπερτέλειου είναι το 12 διότι 12<1+2+3+4+6
ενώ παράδειγμα ελλιπούς αριθμού είναι το 10 γιατί 10>1+2+5.

Φίλοι Αριθμοί

Μια ακόμη ομάδα αριθμών που οφείλεται στους Πυθαγορείους είναι οι φίλοι αριθμοί.
Φίλους ορίζουμε ένα ζευγάρι αριθμών όταν ο καθένας ισούται με το άθροισμα των διαιρετών του άλλου.
Για παράδειγμα το 220 και το 284 είναι φίλοι μεταξύ τους καθώς
284= 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 (διαιρέτες 220)
και 220= 1+2+4+71+142 (διαιρέτες 284).
Στις μέρες μας γνωρίζουμε περίπου 12000 ζευγάρια φίλων αλλά δεν έχει αποδειχθεί πως είναι άπειροι.
Γνωρίζουμε ,όμως, το ότι από τα αρχαία χρόνια οι φίλοι αριθμοί χρησίμευαν ως ένδειξη αγάπης και φιλίας.

Επίλογος

Τελικά βλέπουμε πως τα μαθηματικά δεν είναι μόνο αρίθμηση ή πράξεις, αλλά βαθύτερες έννοιες που αντέχουν στην πάροδο του χρόνου και πολλές φορές απεικονίζουν τον κόσμο γύρω μας. Τα μαθηματικά είναι μια άλλη γλώσσα που αν ακούσουμε προσεκτικά θα δούμε ότι όλα γύρω μας την μιλάνε. Τους τελευταίους μήνες γνωρίσαμε καλύτερα τα μαθηματικά και είδαμε ένα άλλο πρόσωπο αυτής της επιστήμης, που ήταν άγνωστο για μας. Αναληφθήκαμε ότι τα μαθηματικά δεν είναι απλά ένα ακόμη μάθημα στο ωρολόγιο πρόγραμμα μας, αλλά ένα εργαλείο που θα μας προσφέρει βαθύτερες γνώσεις, χρήσιμες για όλη μας τη ζωή. Φίλοι, πρώτοι, τετραγωνικοί κ.τ.λ. υπάρχουν γύρω μας. Το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να μην φοβόμαστε την μαγεία των αριθμών και τα κρυφά μονοπάτια που μας οδηγούν στην ανακάλυψη της γνώσης. Γιατί αν κατανοήσουμε όλοι την έννοια και την χρησιμότητα των μαθηματικών θα δούμε ότι ένας καινούριος κόσμος ξεδιπλώνεται μπροστά μας.